

## 2. 和と漸化式, 配列, リスト

- 実数  $x$  に対して,  $\lfloor x \rfloor$  で  $x$  以下の最大の整数を,  $\lceil x \rceil$  で  $x$  以上の最小の整数をそれぞれ表す.
- 配列とは, データを一列に並べ, 添字 (index) によって要素を指定できるようにしたデータ構造である.
- 2 分探索は, ソートされた配列から要素を探すアルゴリズムである. 配列  $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$  に対して,  $a[0] \leq a[1] \leq \dots \leq a[n-1]$  が成り立つとする. 要素  $x$  が与えられたとき,  $a[i] = x$  となる添字  $i$  を次の手順で探す. 比較回数は  $O(\log n)$  回である (問題 2-5).
  - (1)  $l = 0, r = n - 1$  とする.
  - (2)  $l < r$  である限り, 以下の (i)–(iii) を繰り返す.
    - (i)  $m = \lfloor (l + r) / 2 \rfloor$  とする.
    - (ii)  $a[m] = x$  ならば,  $i = m$  が求める添字であるので終了する.
    - (iii)  $a[m] < x$  ならば  $l = m + 1$  とし, そうでないとき  $r = m - 1$  とする.
  - (3)  $a[l] = x$  ならば,  $i = l$  が求める添字である. そうでないとき,  $a[i] = x$  となる添字  $i$  は存在しない.
- 単方向連結リストとは, 各要素がデータと 1 つのポインタからなり, 各要素のポインタは後続要素のアドレスを格納するデータ構造である. 単方向連結リストは, 指定された要素の直後に要素を挿入したり, 指定された要素の直後の要素を削除することが容易にできる.
- 双方向連結リストとは, 各要素がデータと 2 つのポインタからなり, 各要素のポインタは先行要素と後続要素のアドレスを格納するデータ構造である. 双方向連結リストは, 指定された要素の前後に要素を挿入したり, 指定された要素を削除することが容易にできる.

## 問題

(解答に際して, その問題より前にある問題の結果を用いてもよい. 配列の添字は 0 から始まるものとする.)

2-1.  $\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = O(n^4)$  が成り立つことを示せ.

2-2.  $r > 1$  とする.  $\sum_{k=1}^n \frac{r^{2k}}{r^k - 1} = O(r^n)$  が成り立つことを示せ.

2-3. 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 5, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

で定義する. このとき,  $a_n = O(3^n)$  が成り立つことを示せ.

2-4. 数列  $\{T(n)\}$  を

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + n$$

で定義する.

(a) 非負整数  $k$  に対して,  $T(3^k)$  を  $k$  の式で表せ.

(b) 数列  $\{T(n)\}$  は広義単調増加であることを示せ.

(c)  $T(n) = O(n \log n)$  が成り立つことを示せ.

2-5. 前ページの 2 分探索において, 比較回数が  $O(\log n)$  であることを示せ.

2-6. 次の表で表される, 「D」で始まり「E」で終わる単方向連結リストを考える.

アドレス	10	20	30	40	50	60	70
データ	A	D	E	I	M	N	O
ポインタ	40	70	0	60	10	30	50

リストの先頭を指すポインタは 20 であり, 指し示す要素がないときポインタは 0 とする. このリストからデータ「N」の直後にあるデータ「E」を削除したい. どのような操作をすればよいか述べ, その結果として得られるリストを上のような表に表せ.

2-7. 次の表で表される, 「C」で始まり「Y」で終わる双方向連結リストを考える.

アドレス	10	20	30	40	50	60	70
データ	A	C	G	O	R	T	Y
先行要素へのポインタ	20	0	60	30	40	10	50
後続要素へのポインタ	60	10	40	50	70	30	0

指し示す要素がないときポインタは 0 とする. このリストのデータ「T」の直後にデータ「E」を挿入したい. データ「E」のアドレスが 80 であるとき, どのような操作をすればよいか述べ, その結果として得られるリストを上のような表に表せ.