アルゴリズム B 演習 No. 1　　　　　　　　　　2018 年 10 月 12 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- b を 2 以上の整数とする．正の整数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \text{ は正の整数}, \, a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, \, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の ***b* 進表記**という．この記数法を ***b* 進法**という．

- 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(10001)_2$　(b) $(101000)_2$　(c) $(110011)_2$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

(a) $(24)_{10}$　(b) $(39)_{10}$　(c) $(52)_{10}$

1-3. 10 進法で表された次の数を 16 進法で表せ．ただし，10, 11, ..., 15 を 16 進法で表すのに A, B, ..., F を用いる．

(a) $(289)_{10}$　(b) $(2007)_{10}$　(c) $(3834)_{10}$

1-4. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) \geq 0$ が成り立つとする．このとき，

$$f(n) + g(n) = O\bigl(\max\{f(n), g(n)\}\bigr)$$

が成り立つことを示せ．

1-5. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．有限な極限値

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ．（逆は成り立たないことに注意せよ．）

1-6. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

（a）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

（b）$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$.

1-7. 次の式が成り立つことを示せ．

（a）$2n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.

（b）$e^{\sqrt{\log n}} = o(n)$.

1-8. 次の式が成り立つことを示せ．

（a）$2^n + n^3 = O(2^n)$.

（b）$3^n = o(n!)$.

1-9. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\log n = o(n^{\varepsilon})$ であることを示せ．