

広域数理科学概論 (4) レポート課題

2018年1月18日配布

提出日：2018年2月1日

注意

- 以下の6問のうち、2問以上解答すること。
- 1枚目に科目名・学修番号・氏名を書くこと。
- レポートが複数枚にわたるときは、左上をホッチキス等で綴じること。
- A4レポート用紙を使用すること。

問題

以下、代数体 K の整数環を \mathcal{O}_K で表し、 \mathcal{O}_K の判別式を d_K で表す。

1. K を代数体、 $n = [K : \mathbb{Q}]$ とする。 $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathcal{O}_K$ が K の \mathbb{Q} 上の基底であるとする。 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ の判別式 $D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ が平方因子を持たないならば、 $\omega_1, \dots, \omega_n$ は \mathcal{O}_K の \mathbb{Z} 上の基底であり、 $d_K = D(\omega_1, \dots, \omega_n)$ であることを示せ。
2. $d \neq 0, 1$ を平方因子を持たない整数として、 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とする。以下の問いに答えよ。
 - (a) $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ならば、

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{ u + v\sqrt{d} \mid u, v \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり、 $d_K = 4d$ であることを示せ。

- (b) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ならば、

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right] = \left\{ \frac{u + v\sqrt{d}}{2} \mid u, v \in \mathbb{Z}, u \equiv v \pmod{2} \right\}$$

であり、 $d_K = d$ であることを示せ。

3. 虚2次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ を考える。以下の問いに答えよ。
 - (a) K の類数が1であることを示せ。
 - (b) \mathcal{O}_K のイデアル (5) が素イデアルであることを示せ。

4. d を平方因子を持たない正の整数として, $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ とする. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (a) $\varepsilon = u + v\sqrt{d} \in \mathcal{O}_K^\times$ ($u, v \in \mathbb{Z}$) とする. このとき, $\varepsilon > 1$ であることと $u > 0$ かつ $v > 0$ であることは同値であることを示せ.
- (b) 1 より大きい K の単数のうち最小のものを ε_0 とする. このとき,

$$\mathcal{O}_K^\times = \{\pm\varepsilon_0^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$$

が成り立つことを示せ.

(c) 条件

$$u^2 - dv^2 = \pm 1, \quad u > 0, \quad v > 0 \quad (*)$$

を満たす整数の組 $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ の中で, u が最小であるものを (u_0, v_0) とする. このとき, (b) の ε_0 に対して, $\varepsilon_0 = u_0 + v_0\sqrt{d}$ が成り立つことを示せ.

5. 実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (a) \mathcal{O}_K のイデアル $(2, \sqrt{10})$ が単項イデアルではないことを示せ.
- (b) K の類数が 2 であることを示せ.
- (c) $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm(3 + \sqrt{10})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であることを示せ.

6. α を $x^3 - x^2 + 1$ の根として, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (a) $x^3 - x^2 + 1$ は実数根を 1 個, 虚数根を 2 個持つことを示せ.
- (b) $\mathcal{O}_K = \{u + v\alpha + w\alpha^2 \mid u, v, w \in \mathbb{Z}\}$ であることを示し, d_K を求めよ.
- (c) K の類数が 1 であることを示せ.