

離散数学入門 a レポート課題 No. 2

2017 年 7 月 4 日配布

提出日：2017 年 7 月 18 日

注意

- 7 月 18 日の講義の際に提出すること。
- 1 枚目に所属コース・学修番号・氏名を書くこと。
- レポートが複数枚にわたるときは、左上をホッチキス等で綴じること。
- A4 レポート用紙を使用し、表面のみに解答すること。
- 自然数は 1 以上の整数とする。自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し、整数 a の同値類を $[a]$ で表す。グラフとして、無向単純グラフのみを考える。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

問題

- 以下の問いに答えよ。
 - (a) $a, b \in \mathbb{N}$ に対して、 a と b の最小公倍数を $\text{lcm}(a, b)$ で表す。 \mathbb{N} 上の演算 $*$ を $a * b = \text{lcm}(a, b)$ で定めたとき、 \mathbb{N} は演算 $*$ に関してモノイドであるが群でないことを示せ。
 - (b) G を群として、 $a \in G$ とする。加法群 \mathbb{Z} から G への写像 f を $f(n) = a^n$ で定義するとき、 f が準同型写像であることを示せ。
 - (c) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。対称群 S^X の部分集合 $H = \{f \in S^X \mid f(1) = 1\}$ は S^X の部分群であることを示せ。
 - (d) 環 \mathbb{Z}_{31} において、 $[11] \times x + [23] = [9]$ を満たす $x \in \mathbb{Z}_{31}$ を求めよ。
 - (e) 集合 $L = \{0, 1\}$ は通常の順序関係に関して全順序集合である。 $a, b \in L$ に対して $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ と定めたとき、 L は演算 \vee と \wedge に関してブール代数であることを示せ。
- グラフ $G = (V, E)$ を
$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$
$$E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}, \{x_5, x_6\}\}$$
で定める。以下の問いに答えよ。
 - (a) G を図示せよ。
 - (b) G の隣接行列 A を求めよ。
 - (c) G の部分グラフで 3 角形グラフになるものの個数を求めよ。
- 以下の問いに答えよ。
 - (a) 位数 6 の 3-正則グラフの例を 1 つ与えよ。
 - (b) $k = 1, 3, 5$ のとき、位数 7 の k -正則グラフが存在しないことを示せ。