

離散数学入門 a 第 7 回 配付資料

2017 年 5 月 23 日

母関数の利用例

$f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1} (n \geq 3)$ と定義された数列 f_1, f_2, \dots をフィボナッチ数列という。最初の数項は、

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

となる。一般項を母関数を用いて求める。便宜上 $f_0 = 0$ とする。

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$$

とおく。このとき、

$$\begin{aligned} xF(x) &= f_0x + f_1x^2 + f_2x^3 + \dots, \\ x^2F(x) &= f_0x^2 + f_1x^3 + \dots. \end{aligned}$$

$n \geq 2$ に対して $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ が成り立つから、

$$F(x) - xF(x) - x^2F(x) = f_0 + f_1x - f_0x = x$$

となる。すなわち、

$$(1 - x - x^2)F(x) = x$$

だから、

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とおくと、 $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ である。よって、

$$F(x) = \frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right).$$

ここで、

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha x)^i$$

である。 β についても同様だから、

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\alpha x)^i - \sum_{i=0}^{\infty} (\beta x)^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^i - \beta^i) x^i. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

となる。