

注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X \setminus Y$, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す. 全体集合 U の部分集合 X に対して, X の補集合を \bar{X} で表す. 自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し, 整数 a の同値類を $[a]$ で表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $U = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 9\}$ とする. U の部分集合

$$A = \{1, 4, 8, 9\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}, \quad C = \{n \mid n \in U, n \leq 5\}, \quad D = \{n \mid n \in U, n \text{ は奇数}\}$$

に対して, 以下の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

(a) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ (b) $(B \cup D) \setminus A$ (c) $(A \cap D) \times (B \cap C)$ (d) $2^A \cap 2^B$

2. 以下の問いに答えよ.

(a) X を 2 個以上の要素を持つ集合として, M_X を X から X への写像全体の集合とする. 写像の合成を演算とすると, M_X はモノイドであるが群でないことを示せ.

(b) 環 \mathbb{Z}_{47} において, $[31] \times x + [7] = [41]$ を満たす $x \in \mathbb{Z}_{47}$ を求めよ.

3. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とし, S^X を X 上の対称群とする. $i = 1, 2, 3, 4$ に対し, $A_i = \{\sigma \mid \sigma \in S^X, \sigma(i) = i\}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(a) 任意の $i = 1, 2, 3, 4$ に対し, A_i が S^X の部分群であることを示せ.

(b) S^X を全体集合として, $D = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ とおく. D の要素の個数 $|D|$ を求めよ.

4. $G = (V, E)$ を位数 4 のグラフとして, $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とする. G の隣接行列 B が

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

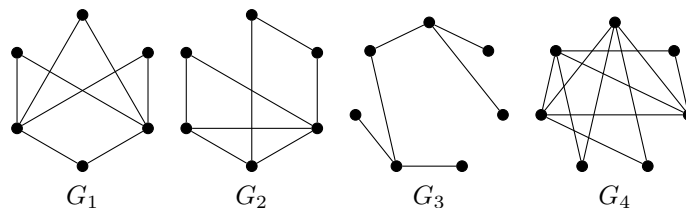
で与えられるとする. ただし, B の第 i 行が点 x_i に対応するものとする. 以下の問いに答えよ.

(a) G を図示せよ.

(b) G の隣接行列 A を求めよ.

(c) $\frac{1}{6} \text{tr} A^3$ を求めよ. ただし, tr は行列のトレースを表す.

5. 下図のグラフ G_1, G_2, G_3, G_4 について, 以下の問いに答えよ. (答えのみでよい.)



(a) 木であるものをすべて答えよ.

(b) オイラーグラフであるものをすべて答えよ.

(c) ハミルトングラフであるものをすべて答えよ.