離散数学入門 a　中間試験　　2017 年 6 月 6 日

注意

自然数は 1 以上の整数とする．集合 X, Y に対して，X と Y の差集合を $X \setminus Y$，X と Y の直積を $X \times Y$，X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す．全体集合 U の部分集合 X に対して，X の補集合を $\overline{X}$ で表す．その他，記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする．

問題

1. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{3,4,6,8\}, C = \{2,3,4,6\}$ に対して，次の各集合を求め，要素を列挙して表せ．

   (a) $A \cap (B \cup C)$　(b) $(A \cup B) \setminus C$　(c) $\overline{A \cup B \cup C}$

2. 集合 $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4,5\}$ に対して，次の各集合を求め，要素を列挙して表せ．

   (a) $(A \cap B) \times (B \cup C)$　(b) $2^{A \setminus C}$

3. X, Y, Z を集合として，$X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ とする．$\leq_Y, \leq_Z$ がそれぞれ Y, Z 上の半順序関係であるとする．X 上の関係 $\leq_X$ を次のように定義する．$a, b \in X$ が (i)–(iii) のいずれかを満たすとき，$a \leq_X b$ であると定義する．
   (i) $a \in Y$ かつ $b \in Y$ かつ $a \leq_Y b$.
   (ii) $a \in Y$ かつ $b \in Z$.
   (iii) $a \in Z$ かつ $b \in Z$ かつ $a \leq_Z b$.
   このとき，$\leq_X$ は X 上の半順序関係であることを示せ．

4. p, q, r を命題変数とする．(a)–(c) の真理値表を作成せよ．また，命題 $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ と同値であるものを (a)–(c) の中からすべて選べ．

   (a) $p \wedge q \wedge r$　(b) $p \veebar q \veebar r$　(c) $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$

5. (a)–(d) の写像について，(i)–(iv) のいずれに当てはまるか理由とともに答えよ．
   (a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_1(x) = x^2$.
   (b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_2(x) = x^3$.
   (c) $f_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ f_3(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$.
   (d) $f_4 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ f_4(x) = |x-3| + 1$.

   (i)　全単射である．　(ii)　単射であるが全射でない．
   (iii)　全射であるが単射でない．　(iv)　単射でも全射でもない．

6. 数列 $a_0, a_1, \ldots$ が漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \ (n \geq 0)$$

   で定義されているとする．以下の問いに答えよ．
   (a) 母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   を求めよ．
   (b) 一般項 a_n を求めよ．