

12. 素数判定

2 以上の自然数 n が素数かどうか判定する問題を考える. n が偶数かどうかは容易にわかる. そこで, 以下では n を 3 以上の奇数とする.

- 試し割算 (trial division) は次のような方法である. n を 3 以上 \sqrt{n} 以下の奇数で順に割り, 一度も割り切れなければ n は素数である.
- p を素数, b を p と互いに素な整数とすると, $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つ. これをフェルマーの小定理という. この定理は問題 10-9 から直ちに従う. この定理の対偶を考えると, n と互いに素な整数 b が存在して, $b^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ ならば, n は合成数である.
- フェルマーの小定理の逆は一般には成り立たない. そこで, n を合成数, b を n と互いに素な整数として, $b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ が成り立つとき, n を b を底とする擬素数 (pseudoprime) という.
- n を合成数とする. n と互いに素なすべての整数 b に対して n が b を底とする擬素数であるとき, n をカーマイケル数 (Carmichael number) という. カーマイケル数は無限個存在することが知られている.
- n を奇数として, $n-1 = 2^s t$ (t は奇数) と表す. n が素数ならば, n と互いに素なすべての整数 b に対して, 次の条件が成り立つ (問題 12-5).

$$b^t \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{または} \quad b^{2^r t} \equiv -1 \pmod{n} \quad \text{を満たす } r \ (0 \leq r \leq s-1) \text{ が存在する.} \quad (1)$$

そこで, n を奇数の合成数として, n と互いに素な整数 b が条件 (1) を満たすとき, n を b を底とする強擬素数 (strong pseudoprime) という. $0 < b < n$ となる整数 b のうち, n が b を底とする強擬素数となるのは全体の高々 $1/4$ であることが知られている.

- ミラー・ラビンの素数判定法 (Miller-Rabin primality test) は次のようなアルゴリズムである. n を 3 以上の奇数として, n が素数かどうか判定したいとする.
 - 整数 b を $0 < b < n$ の範囲でランダムに選ぶ. $\gcd(b, n) > 1$ であるか, $\gcd(b, n) = 1$ であって条件 (1) が成り立たなければ, n は合成数である.
 この手続きを何回か繰り返して合成数と判定されなければ, n は高い確率で素数となる.

- ミラー・ラビンの素数判定法では素数であることを証明できない。素数であることを証明するためのアルゴリズムとして、ヤコビ和を用いる Adleman-Pomerance-Rumely 素数判定法，楕円曲線を用いる ECPP (elliptic curve primality proving) などがある。また，2002 年 Agrawal, Kayal, Saxena によって，素数判定の決定性多項式時間アルゴリズムである AKS アルゴリズムが発見された。

問題

解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい。また，四則演算のビット演算量として，No. 8 で与えたものを使うものとする。

- 12-1. $2^{208} \bmod 209$ を計算することで 209 が合成数であることを示せ。
- 12-2. 39 が擬素数となる底 b で $0 < b < 39$ を満たすものをすべて求めよ。
- 12-3. n を合成数とする。 n のすべての素因数 p が $p^2 \nmid n$ かつ $(p-1) \mid (n-1)$ を満たすならば， n はカーマイケル数であることを示せ。
- 12-4. $6601 = 7 \cdot 23 \cdot 41$ がカーマイケル数であることを示せ。
- 12-5. n が奇数かつ素数ならば， n と互いに素なすべての整数 b に対して，条件 (1) が成り立つことを示せ。
- 12-6. n が b を底とする強擬素数ならば， n は b を底とする擬素数であることを示せ。
- 12-7. 91 は 3 を底とする擬素数であるが， 3 を底とする強擬素数ではないことを示せ。
- 12-8. ミラー・ラビンの素数判定法において，条件 (1) を 1 回判定するのに必要なビット演算量は $O((\log n)^3)$ であることを示せ。