6. ソート (2)

前回と同様に，列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ を昇順に並べ替えるものとして説明する．

ヒープソート まず，要素の列から最大値が先頭になるヒープを作る[*1]．次に，ヒープから最大値を取り出し，最後の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする．

クイックソート 要素の列からピボット（枢軸要素）を選ぶ．ピボット未満の要素を左側に，ピボット以上の要素を右側に集め，2 つの部分列を作る．この 2 つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで，要素の列がソートされる．

列 $a[l], \ldots, a[r]$ から 2 つの部分列を作る操作は次のように行うことができる．

(1) $a[l], \ldots, a[r]$ からピボットを選び，列の右端 $a[r]$ と交換する．

(2) $i = l - 1,\ j = r$ とする．

(3) i を 1 増やす．$a[i] < a[r]$ ならば (3) に戻る．

(4) j を 1 減らす．$i < j$ かつ $a[j] \geq a[r]$ ならば (4) に戻る．

(5) $i < j$ ならば，$a[i]$ と $a[j]$ を交換し，(3) に戻る．

(6) $a[i]$ と $a[r]$ を交換する．このとき，次が成り立つ．

$$a[l], \ldots, a[i-1] < a[i], \quad a[i] \leq a[i+1], \ldots, a[r].$$

マージソート 列を 2 つに等分し，それぞれを再帰的にソートする．ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた列を作る．

部分列の結合は次のように行われる．まず新しい空の列を用意しておく．次に，2 つの部分列の先頭を比較し，小さい方を取り除いて新しい列に追加する．この操作を繰り返し，一方の部分列がなくなったら，もう一方の部分列を新しい列に連結する．

問題

- 実数 x に対し，x の切り捨て（x 以下の整数で最大のもの）を $\lfloor x \rfloor$ で表し，x の切り上げ（x 以上の整数で最小のもの）を $\lceil x \rceil$ で表す．
- 解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．
- 比較回数は列の要素のものだけを数え，添字の比較回数は数えないものとする．

[*1] プリント No. 4 では最小値を先頭にしていたことに注意せよ．

6-1. 次の整数列 $(*)$ をヒープソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

$$43, 80, 10, 61, 51, 40, 53, 31 \tag{$*$}$$

6-2. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボット（枢軸要素）として**右端**の数を選ぶものとする．

6-3. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボットとして**左端**の数を選ぶものとする．

6-4. 整数列 $(*)$ をマージソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

6-5. n 個の要素からなる列をヒープソートによってソートするとき，比較回数が $O(n \log n)$ であることを示せ．

6-6. n 個の相異なる要素の列を前ページの手順でクイックソートによってソートする．ピボットとして常に部分列の中央値を選んだと仮定する．このときの比較回数を $C(n)$ とする．ただし，ピボットを選択する際の比較回数は数えないものとする．

（a）次の式が成り立つことを示せ．

$$C(0) = C(1) = 0,\ C(n) \leq C\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) + n\ (n \geq 2).$$

（b）$C(n) = O(n \log n)$ を示せ．

6-7. n 個の要素の列をマージソートによってソートするときの比較回数を $C(n)$ とする．

（a）次の式が成り立つことを示せ．

$$C(0) = C(1) = 0,\ C(n) \leq C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1\ (n \geq 2).$$

（b）$C(n) = O(n \log n)$ を示せ．