5. ソート (1)

要素の列を大きさの順に並び替えることを**ソート（整列）**という．

ソートのアルゴリズムには様々なものが知られているが，今回は以下のものを取り扱う．以下では，列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ を昇順に並び替えるものとして説明する．

バブルソート 列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ を先頭から見ていき，隣接している要素の順序が逆転していたら交換する．これを最後まで行うと，$a[n-1]$ が最大値となるので，列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-2]$ に同様の操作を行う．以下同様に繰り返す．

選択ソート 列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ から最小の要素を選び，それを $a[0]$ と交換する．次に，列 $a[1], a[2], \ldots, a[n-1]$ から最小の要素を選び，それを $a[1]$ と交換する．以下同様に繰り返す．

挿入ソート $a[0] > a[1]$ ならば $a[0]$ と $a[1]$ を交換する．このとき列 $a[0], a[1]$ はソートされている．次に，$a[2]$ を列 $a[0], a[1]$ の中で正しい位置に挿入する．このとき列 $a[0], a[1], a[2]$ はソートされている．以下同様に繰り返す．

シェルソート[*1] 正の整数の列 $h_1, h_2, \ldots, h_k$ を固定する．ただし，$h_k = 1$ とする．次の手順でソートを行う．

1. $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して手順 2 を繰り返す．
2. $j = 0, 1 \ldots, h_i - 1$ に対して，部分列 $a[j], a[j+h_i], a[j+2h_i], \ldots$ を挿入ソートでソートする．

手順 2 を $\boldsymbol{h_i}$ **ソート**という．また，すべての $j = 0, 1 \ldots, h-1$ に対して，$a[j] \leq a[j+h] \leq a[j+2h] \leq \cdots$ であるとき，列 a は $\boldsymbol{h}$ **ソート済み**であるという．

数列 $\{h_i\}$ としては，例えば，以下のものが用いられる．

- $h_k = 1,\ h_{i-1} = 3h_i + 1.$
- $h_k = 1,\ h_{i-1} = 2h_i + 1.$

どちらの場合も，最悪の場合の比較回数は $O(n^{3/2})$ であることが知られている．また，別の数列 $\{h_i\}$ で，比較回数が漸近的により少ないものも知られている．

[*1] シェル (Shell) は人名である．

問題

5-1. 次の整数列 $(*)$ をバブルソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

$$43,\ 80,\ 10,\ 61,\ 51,\ 40,\ 53,\ 31 \tag{$*$}$$

5-2. 整数列 $(*)$ を選択ソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

5-3. 整数列 $(*)$ を挿入ソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

5-4. 整数列 $(*)$ をシェルソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，数列 $\{h_i\}$ として，$h_1 = 4$, $h_2 = 1$ を用いるとする．

5-5. 整数列 $(*)$ をシェルソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，数列 $\{h_i\}$ として，$h_1 = 7$, $h_2 = 3$, $h_3 = 1$ を用いるとする．

以下の問題において，比較回数は列の要素のものだけを数え，添字の比較回数は数えないものとする．

5-6. n 個の要素の列をバブルソートによってソートするとき，最悪の場合の比較回数，交換回数はともに $O(n^2)$ であることを示せ．

5-7. n 個の要素の列を選択ソートによってソートするとき，比較回数は $O(n^2)$，交換回数は $O(n)$ であることを示せ．

5-8. n 個の要素の列を挿入ソートによってソートするとき，最良の場合の比較回数は $O(n)$，最悪の場合の比較回数は $O(n^2)$ であることを示せ．

5-9. k, h を正の整数とする．要素の列に k ソートと h ソートを順に行ったとき，その列は k ソート済みであることを示せ．