アルゴリズム B 演習 No. 4　　2017 年 11 月 10 日配布

4. 優先順位付きキュー，ヒープ，ハッシュ表

- **優先順位付きキュー**は，次の操作を持つデータ構造である．
  - insert(x): x を挿入する．
  - deletemin: 優先順位付きキューの最小の要素を返し，キューから削除する．

  優先順位付きキューは，ヒープを用いて実現できる．
- **（2 分）ヒープ**とは，（広義の）完全 2 分木であり，ヒープ条件「各頂点の値はその子の値以下である」を満たすものである．

  ヒープ条件から，ヒープの根の値は最小値である．ヒープの上から順に左から右へ向かって添字を付けることで，ヒープを配列で表現できる[*1]．

  要素 x を挿入するには，まず配列としての末尾に x を追加する．x を 2 分木の頂点と見なしたときの親と値を比較し，x の方が値が小さいとき交換する．この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき，ヒープ条件を満たしている．

  最小値を削除するには，まずヒープの根を削除し，配列と見なして末尾にあたる頂点 x を根に移動する．x が子を持つとき，x の子で x より値が小さいものがあれば，そのうちの小さい方と x を交換する．この操作を繰り返して交換が起きなくなったとき，ヒープ条件を満たしている．
- **ハッシュ表**は，順序構造を用いずに，要素の挿入，削除，探索がほぼ定数時間で行えるデータ構造である．要素の格納場所を決めるために，ハッシュ関数と呼ばれる関数を用いる．異なる要素に対するハッシュ値が等しくなる可能性があり，これを**衝突**という．衝突に対処する方法として以下のものがある．
  - **チェイン法** (chaining) では，ハッシュ値が等しい要素を連結リストに格納する．ハッシュ表には連結リストへのポインタが格納されている．
  - **開番地法** (open addressing) では，ハッシュ表そのものに要素を格納する．

    要素の挿入の際，ハッシュ値を計算し，ハッシュ表の対応する場所が空または削除済みのときその場所に格納する．要素が入っていた場合の対処のうち，最も単純な**線形探査法**では，ハッシュ表の次の場所を調べ，同様に繰り返す．

    要素の削除の際は，ハッシュ表の対応する場所に「削除済み」の印を付ける．

    要素の探索の際には，「削除済み」の場所は飛ばして次を調べる．

[*1] この配列をヒープと呼ぶこともある．

問題

4-1. 以下の配列で表現されたヒープを 2 分木として図示せよ．

添字	0	1	2	3	4	5	6	7
	16	66	24	83	94	60	46	96

4-2. ヒープで実装された空の優先順位付きキューに対し，次の操作を行ったときの過程と最終的に得られる木を図示せよ．

$$\text{insert}(92) \to \text{insert}(37) \to \text{insert}(44) \to \text{insert}(68) \to \text{insert}(98) \to \text{deletemin} \to \text{insert}(84)$$

4-3. 要素数 n の配列 a に対して，次の手順でヒープを構成できる．

- $i = \lfloor n/2 \rfloor - 1, \ldots, 1, 0$ に対して，以下を繰り返す．
  - $a[i]$ に対応する頂点を x として，以下を交換が起きなくなるまで繰り返す．
    - 頂点 x が子を持つとき，x の子で x より値が小さいものがあれば，そのうちの小さい方と x を交換する．

この手順でヒープを構成したとき，交換回数が $O(n)$ 回であることを示せ．

4-4. 4-3 の方法で，配列 $a = [66, 44, 56, 49, 18, 33, 93, 32]$ からヒープを構成する過程と最終的に得られる木を図示せよ．

4-5, 4-6 では，ハッシュ関数は 7 で割った余りを返すものとする．また，ハッシュ表の大きさは 7 であり，0 から 6 までの整数で位置を指定するものとする．

4-5. チェイン法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の挿入）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

$$\text{insert}(89) \to \text{insert}(22) \to \text{insert}(65) \to \text{insert}(15) \to \text{delete}(22) \to \text{insert}(64)$$

4-6. 開番地法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の挿入）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

$$\text{insert}(89) \to \text{insert}(22) \to \text{insert}(65) \to \text{insert}(15) \to \text{delete}(22) \to \text{insert}(64)$$

4-7. 開番地法を用いた大きさ m のハッシュ表に n 個の要素が格納されているとして，$\alpha = n/m < 1$ とする．ハッシュ関数はすべての値を等確率で返すとする．また，ハッシュ表における n 個の要素の配置はすべて等確率で現れると仮定する．（この仮定は線形探査法では成り立たない．）このハッシュ表に要素を挿入するとき，ハッシュ表の要素を調べる回数の期待値が $1/(1-\alpha)$ 以下であることを示せ．