

2. 和と漸化式, 配列, リスト

- 実数 x に対して, $\lfloor x \rfloor$ で x 以下の最大の整数を, $\lceil x \rceil$ で x 以上の最小の整数をそれぞれ表す.
- 配列とは, データを一列に並べ, 添字 (index) によって要素を指定できるようにしたデータ構造である.
- 2 分探索は, ソートされた配列から要素を探すアルゴリズムである. 配列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ に対して, $a[0] \leq a[1] \leq \dots \leq a[n-1]$ が成り立つとする. 要素 x が与えられたとき, $a[i] = x$ となる添字 i を次の手順で探す. 比較回数は $O(\log n)$ 回である.
 - (1) $l = 0, r = n - 1$ とする.
 - (2) $l < r$ である限り, 以下の (i)–(iii) を繰り返す.
 - (i) $m = \lfloor (l + r) / 2 \rfloor$ とする.
 - (ii) $a[m] = x$ ならば, $i = m$ が求める添字であるので終了する.
 - (iii) $a[m] < x$ ならば $l = m + 1$ とし, そうでないとき $r = m - 1$ とする.
 - (3) $a[l] = x$ ならば, $i = l$ が求める添字である. そうでないとき, $a[i] = x$ となる添字 i は存在しない.
- 単方向連結リストとは, 各要素がデータと 1 つのポインタからなり, 各要素のポインタは後続要素のアドレスを格納するデータ構造である. 単方向連結リストは, 指定された要素の直後に要素を追加したり, 指定された要素の直後の要素を削除することが容易にできる.
- 双方向連結リストとは, 各要素がデータと 2 つのポインタからなり, 各要素のポインタは先行要素と後続要素のアドレスを格納するデータ構造である. 双方向連結リストは, 指定された要素の前後に要素を追加したり, 指定された要素を削除することが容易にできる.

問題

(解答に際して, その問題より前にある問題の結果を用いてもよい. 配列の添字は 0 から始まるものとする.)

2-1. $\sum_{k=1}^n k^4 = \Theta(n^5)$ が成り立つことを示せ. ただし, $f(n) = \Theta(g(n))$ は $f(n) = O(g(n))$ かつ $g(n) = O(f(n))$ を意味する (問題 1-9 参照).

2-2. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\log k} = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ が成り立つことを示せ.

2-3. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 12, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 8a_n$$

で定義する. このとき, $a_n = O(4^n)$ が成り立つことを示せ.

2-4. 数列 $\{T(n)\}$ を

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

で定義する.

(a) 非負整数 k に対して, $T(2^k)$ を k の式で表せ.

(b) n を正の整数として, 整数 k は $2^{k-1} < n \leq 2^k$ を満たすとする. このとき, $T(n) \leq T(2^k)$ が成り立つことを示せ.

(c) $T(n) = O(n \log n)$ が成り立つことを示せ.

2-5. 前ページの 2 分探索は, 配列 a が x を複数含むとき, $a[i] = x$ となる添字 i が最小であるとも最大であるとも保証しない. この 2 分探索を変更して, $a[i] = x$ となる最小の添字 i を探す比較回数が $O(\log n)$ のアルゴリズムを構成せよ.

2-6. 次の表で表される, 「P」で始まり「T」で終わる単方向連結リストを考える.

アドレス	10	20	30	40	50	60
データ	C	D	O	P	R	T
ポインタ	60	10	20	50	30	0

リストの先頭を指すポインタは 40 であり, 指し示す要素がないときポインタは 0 とする. このリストのデータ「D」の直後にデータ「U」を挿入したい. データ「U」のアドレスが 70 であるとき, どのような操作をすればよいか述べ, その結果として得られるリストを上のような表のように表せ.

2-7. 次の表で表される, 「M」で始まり「X」で終わる双方向連結リストを考える.

アドレス	10	20	30	40	50	60	70
データ	A	I	M	O	R	T	X
先行要素へのポインタ	30	50	0	60	40	10	20
後続要素へのポインタ	60	70	10	50	20	40	0

指し示す要素がないときポインタは 0 とする. このリストからデータ「O」を削除したい. どのような操作をすればよいか述べ, その結果として得られるリストを上のような表のように表せ.