アルゴリズム B 演習 No. 1　　　2017 年 10 月 13 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- b を 2 以上の整数とする．正の整数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \text{ は正の整数}, a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の $\boldsymbol{b}$ **進表記**という．この記数法を $\boldsymbol{b}$ **進法**という．

- 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(10100)_2$　(b) $(100111)_2$　(c) $(110110)_2$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

(a) $(18)_{10}$　(b) $(23)_{10}$　(c) $(47)_{10}$

1-3. 16 進法で表された次の数を 8 進法で表せ．ただし，10, 11, ..., 15 を 16 進法で表すのに A, B, ..., F を用いる．

(a) $(\mathrm{CE})_{16}$ (b) $(\mathrm{2BF})_{16}$ (c) $(\mathrm{1F05})_{16}$

1-4. 関数 $f(n), g(n), h(n)$ を考える．以下が成り立つことを示せ．

(a) $f(n) = O\big(g(n)\big)$ かつ $g(n) = O\big(h(n)\big)$ ならば，$f(n) = O\big(h(n)\big)$.

(b) $f(n) = o\big(g(n)\big)$ かつ $g(n) = o\big(h(n)\big)$ ならば，$f(n) = o\big(h(n)\big)$.

1-5. 関数 $f(n), g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0, g(n) > 0$ が成り立つとする．有限な極限値

$$M = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\big(g(n)\big)$ が成り立つことを示せ．（逆は成り立たないことに注意せよ．）

1-6. 関数 $f(n), g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0, g(n) > 0$ が成り立つとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

(a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$

(b) $f(n) = o\big(g(n)\big)$.

1-7. 次の式が成り立つことを示せ．

(a) $3n^3 + 5n^2 - 2n + 6 = O(n^3)$.

(b) $\log\log n = o(\log n)$.

1-8. 次の式が成り立つことを示せ．

(a) $\log(n^3 + n) = O(\log n)$.

(b) $3^{n(n+1)/2} = o(2^{n^2})$.

1-9. 関数 $f(n), g(n)$ を考える．$g(n) = O\big(f(n)\big)$ であるとき $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ と表し，$f(n) = O\big(g(n)\big)$ かつ $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ であるとき $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ と表す．このとき，以下は同値であることを示せ．

(a) $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$.

(b) ある正の実数 c_1, c_2 と非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

が成り立つ．