

注意

- 答案用紙に2枚とも所属・学修番号・氏名を書くこと。
- 答案用紙の裏面を用いてもよい。
- 自然数は1以上の整数とする。集合 X, Y に対して、 X と Y の差集合を $X - Y$ 、 X と Y の対称差を $X \Delta Y$ 、 X と Y の直積を $X \times Y$ 、 X のべき集合を $\mathcal{P}(X)$ でそれぞれ表す。普遍集合を U とする集合 X の補集合を X^c で表す。有限集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

問題

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を普遍集合とする。 $A = \{3, 5, 6, 9\}$, $B = \{1, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$ に対して、以下の各集合を求め、要素を列挙して表せ。

$$(a) B \cap (A \cup C) \quad (b) A \cup (C - B) \quad (c) (A^c - B)^c \quad (d) A \Delta (B \Delta C)^c$$

2. $U = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。 $\mathcal{P}(U)$ を普遍集合として、 X を $\mathcal{P}(U)$ を変域とする変数としたとき、以下の各集合の要素の個数を求めよ。

$$(a) A = \{X \mid 2 \in X\} \quad (b) B = \{X \mid |X| = 2\}$$

3. p, q, r を命題変数とする。 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ と $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ が論理同値であることを示せ。
 4. 変数 x, y の変域を \mathbb{R} とする。以下の命題の真偽を判定し、理由とともに答えよ。

$$(a) \forall x (x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow x < 2) \quad (b) \exists x (x^2 + 1 < 2x)$$

$$(c) \forall x \exists y (x = y^2) \quad (d) \exists x \forall y (xy = 0)$$

5. \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像 f を

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; \quad f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & (x \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (a) f が全射であることを示せ。
 (b) f が単射ではないことを示せ。
 6. 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の関係 R_1, R_2, R_3 が以下の集合で与えられているとする。

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 5)\},$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\},$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5)\}.$$

R_1, R_2, R_3 のうち同値関係であるものをすべて選べ。また、同値関係である R_i に対して、商集合 X/R_i を求め、要素を列挙して表せ。