

離散数学入門 a レポート課題 No. 2

2016 年 7 月 5 日配布

提出日：2016 年 7 月 19 日

注意

- 7 月 19 日の講義の際に提出すること。
- 1 枚目に所属コース・学修番号・氏名を書くこと。
- レポートが複数枚にわたるときは、左上をホッチキス等で綴じること。
- A4 レポート用紙を使用し、表面のみに解答すること。
- 自然数は 1 以上の整数とする。自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し、整数 a の同値類を $[a]$ で表す。その他、記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする。

問題

1. \mathbb{Z} の有限部分集合 A に対して、 A の最大値を $\max A$ で表す。 \mathbb{Z} 上の演算 \oplus を、 $a \oplus b = \max\{a, b\}$ で定義する。以下の問いに答えよ。
 - (a) \mathbb{Z} は演算 \oplus に関して半群であるがモノイドでないことを示せ。
 - (b) \mathbb{N} は演算 \oplus に関してモノイドであるが群でないことを示せ。
2. 以下の問いに答えよ。
 - (a) $X = \{1, 2, 3\}$ とする。対称群 S^X の部分群で巡回群であるものをすべて求めよ。
 - (b) 環 \mathbb{Z}_{59} において、 $[16]$ の乗法に関する逆元を求めよ。
3. 集合 L が \vee と \wedge を演算とするブール代数であるとする。このとき、任意の $a \in L$ に対して a の補元がただ 1 つ存在する（これは証明せずに用いてよい）。 $a \in L$ の補元を a' で表す。以下の問いに答えよ。
 - (a) 任意の $a \in L$ に対して、 $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ が成り立つことを示せ。
 - (b) 任意の $a, b \in L$ に対して、 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ が成り立つことを示せ。
4. 位数 5 の木を同型なものを除いてすべて求めよ。また、それぞれの木について葉の数を求めよ。
5. $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$ とし、グラフ $G = (V, E)$ を考える。以下の問いに答えよ。
 - (a) G の隣接行列 A を求めよ。
 - (b) G の接続行列 B を求めよ。
 - (c) x_2 から x_5 への長さ 3 の歩道の数を求めよ。
 - (d) x_2 から x_5 への道の数を求めよ。
 - (e) $\frac{1}{6} \operatorname{tr}(A^3)$ を求めよ。