

注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X \setminus Y$, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す. 全体集合 U の部分集合 X に対して, X の補集合を \overline{X} で表す. 自然数 m を法とする合同関係による \mathbb{Z} の商集合を \mathbb{Z}_m で表し, 整数 a の同値類を $[a]$ で表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を全体集合とする. U の部分集合

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{1, 2, 3, 6, 8\}$$

に対して, 以下の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \cup B) \cap C \quad (b) B \setminus A \quad (c) \overline{A \cup C} \quad (d) \{x \mid x \in U \text{ かつ } \forall y \in A, y \leq x\}$$

2. X, Y を空でない集合とする. 写像 $p: X \times Y \rightarrow X$ を $p((x, y)) = x$ で定義する. 以下の問いに答えよ.
 (a) p が全射であることを示せ.
 (b) p が単射でないような X, Y の例を 1 組挙げよ.
3. 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ について, 以下の問いに答えよ.
 (a) べき集合 2^A の要素数 $|2^A|$ を求めよ.
 (b) 2^A 上の包含関係 \subset は半順序関係であるが全順序関係でないことを示せ.
4. 以下の問いに答えよ.
 (a) G を群, H_1, H_2 を G の部分群とすると, $H_1 \cap H_2$ が G の部分群であることを示せ.
 (b) 環 \mathbb{Z}_{31} において, $[12]$ の乗法に関する逆元を求めよ.
5. $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}\}$ として, グラフ $G = (V, E)$ を考える. 以下の問いに答えよ.
 (a) G の点の次数の和 $\sum_{i=1}^5 \deg(x_i)$ を求めよ.
 (b) x_3 から x_5 への長さ 3 の歩道の数をも求めよ.
 (c) x_4 から x_5 への道の数をも求めよ.
 (d) G と完全 2 部グラフ $K_{2,3}$ は同型でないことを示せ.