

注意

自然数は 1 以上の整数とする. 集合 X, Y に対して, X と Y の差集合を $X \setminus Y$, X と Y の直積を $X \times Y$, X のべき集合を 2^X でそれぞれ表す. 全体集合 U の部分集合 X に対して, X の補集合を \bar{X} で表す. その他, 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする.

問題

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を全体集合とする. U の部分集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 6\}, C = \{4, 5, 6\}$ に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \cup B) \cap C \quad (b) A \setminus B \quad (c) \bar{B} \cap \bar{C}$$

2. 集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 5\}$ に対して, 次の各集合を求め, 要素を列挙して表せ.

$$(a) (A \times B) \cap (A \times C) \quad (b) 2^{B \cap C}$$

3. 集合 $X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ 上の関係

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid (a, b), (c, d) \in X, a + d = b + c\}$$

に対して, 以下の問いに答えよ.

- (a) R が同値関係であることを示せ.
 (b) 商集合 X/R を求め, 要素を列挙して表せ. また, その要素数 $|X/R|$ を求めよ.
4. 次の命題の真偽を判定し, 理由とともに答えよ.
- (a) $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$
 (b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 < 0$
 (c) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$
 (d) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y$
5. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7\}$ に対して, 以下の問いに答えよ.
- (a) A の部分集合で要素数が 3 であるものの個数を求めよ.
 (b) A から B への写像の個数を求めよ.
 (c) B から A への単射の個数を求めよ.
 (d) A から B への全射の個数を求めよ.
6. 数列 a_0, a_1, \dots が漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 8, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n \geq 0)$$

で定義されているとする. 以下の問いに答えよ.

- (a) 母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を求めよ.

- (b) 一般項 a_n を求めよ.