6. ソート (2)

前回と同様に，列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ を昇順に並べ替えるものとして説明する．

ヒープソート まず，要素の列から最大値が先頭になるヒープを作る[*1]．次に，ヒープから最大値を取り出し，最後の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする．

クイックソート 要素の列からピボット（枢軸要素）を選ぶ．ピボット未満の要素を左側に，ピボット以上の要素を右側に集め，2 つの部分列を作る．この 2 つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで，要素の列がソートされる．

列 $a[l], \ldots, a[r]$ から 2 つの部分列を作る操作は次のように行うことができる．

(1) ピボットを選び，列の右端 $a[r]$ と交換する．

(2) $i = l-1$, $j = r$ とする．

(3) i を 1 増やす．$a[i] < a[r]$ ならば (3) に戻る．

(4) j を 1 減らす．$i < j$ かつ $a[j] \geq a[r]$ ならば (4) に戻る．

(5) $i < j$ ならば，$a[i]$ と $a[j]$ を交換し，(3) に戻る．

(6) $a[i]$ と $a[r]$ を交換する．このとき，次が成り立つ．

$$a[l], \ldots, a[i-1] < a[i], \quad a[i] \leq a[i+1], \ldots, a[r].$$

マージソート 列を 2 つに等分し，それぞれを再帰的にソートする．ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた列を作る．

部分列の結合は次のように行われる．まず新しい空の列を用意しておく．次に，2 つの部分列の先頭を比較し，小さい方を取り除いて新しい列に追加する．この操作を繰り返し，一方の部分列がなくなったら，もう一方の部分列を新しい列に連結する．

問題

- 実数 x に対し，x の切り捨て（x 以下の整数で最大のもの）を $\lfloor x \rfloor$ で表し，x の切り上げ（x 以上の整数で最小のもの）を $\lceil x \rceil$ で表す．
- 解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．
- 比較回数は列の要素のものだけを数え，添字の比較回数は数えないものとする．

[*1] プリント No. 4 では最小値を先頭にしていたことに注意せよ．

6-1. 次の整数列 $(*)$ をヒープソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

$$63,\ 50,\ 68,\ 32,\ 13,\ 25,\ 82,\ 53 \tag{$*$}$$

6-2. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボット（枢軸要素）として**右端**の数を選ぶものとする．

6-3. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボットとして**左端**の数を選ぶものとする．

6-4. 整数列 $(*)$ をマージソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

6-5. n 個の要素の列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ に次のアルゴリズムを適用すると最大値が先頭になるヒープができることを示せ．

(1) $i = \lfloor (n-2)/2 \rfloor, \ldots, 0$ に対して (i)–(iv) を繰り返す．

　(i) $j = i$ とする．

　(ii) $a[j]$ が子を持たなければ (1) に戻る．$a[j]$ が子を持つとき，$a[j]$ の子を比較し，値が大きい方を $a[k]$ とする．

　(iii) $a[j] < a[k]$ ならば $a[j]$ と $a[k]$ を交換する．

　(iv) 交換が起きていれば，$j = k$ として (ii) に戻る．

6-6. 問題 6-5 のアルゴリズムにおいて，比較回数，交換回数はともに $O(n)$ であることを示せ．

6-7. k を 2 以上の整数とする．マージソートにおいて，列を 2 等分する代わりに k 等分してもソートすることができる．この方法で n 個の要素からなる列をソートするとき，最悪の場合の比較回数を $C(n)$ とすると，

$$C(1) = 0, \quad C(n) \le kC\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right) + c_k n \ (n \ge 2) \tag{$\dagger$}$$

が成り立つ．ただし，c_k は k によって定まる正の定数である．このとき，$C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ．なお，式 $(\dagger)$ は証明せずに用いてよい．また，必要ならば，すべての $n \ge 1$ に対して $C(n) \le C(n+1)$ であると仮定してよい．