

5. ソート (1)

要素の列を大きさの順に並び替えることをソート（整列）という。

ソートのアルゴリズムには様々なものが知られているが、今回は以下のものを取り扱う。以下では、列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ を昇順に並び替えるものとして説明する。

バブルソート 列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ を先頭から見ていき、隣接している要素の順序が逆転していたら交換する。これを最後まで行くと、 $a[n-1]$ が最大値となるので、列 $a[0], a[1], \dots, a[n-2]$ に同様の操作を行う。以下同様に繰り返す。

選択ソート 列 $a[0], a[1], \dots, a[n-1]$ から最小の要素を選び、それを $a[0]$ と交換する。次に、列 $a[1], a[2], \dots, a[n-1]$ から最小の要素を選び、それを $a[1]$ と交換する。以下同様に繰り返す。

挿入ソート $a[0] > a[1]$ ならば $a[0]$ と $a[1]$ を交換する。このとき列 $a[0], a[1]$ はソートされている。次に、 $a[2]$ を列 $a[0], a[1]$ の中で正しい位置に挿入する。このとき列 $a[0], a[1], a[2]$ はソートされている。以下同様に繰り返す。

シェルソート^{*1} 正の整数の列 h_1, h_2, \dots, h_k を固定する。ただし、 $h_k = 1$ とする。次の手順でソートを行う。

1. $i = 1, 2, \dots, k$ に対して手順 2 を繰り返す。
2. $j = 0, 1, \dots, h_i - 1$ に対して、部分列 $a[j], a[j + h_i], a[j + 2h_i], \dots$ を挿入ソートでソートする。

数列 $\{h_i\}$ としては、例えば、 $h_k = 1, h_{i-1} = 3h_i + 1$ で定まるものが使われる。このとき、最悪の場合の比較回数は $O(n^{3/2})$ であることが知られている。

問題

5-1. 次の整数列 (*) をバブルソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

63, 50, 68, 32, 13, 25, 82, 53 (*)

5-2. 整数列 (*) を選択ソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

5-3. 整数列 (*) を挿入ソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

*1 シェル (Shell) は人名である。

- 5-4. 整数列 (*) をシェルソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, 数列 $\{h_i\}$ として, $h_1 = 4, h_2 = 1$ を用いるとする.
- 5-5. 整数列 (*) をシェルソートによって昇順にソートし, その経過を図示せよ. ただし, 数列 $\{h_i\}$ として, $h_1 = 7, h_2 = 3, h_3 = 1$ を用いるとする.
- 以下の問題において, 比較回数は列の要素のものだけを数え, 添字の比較回数は数えないものとする.
- 5-6. 整数列 (*) を並べ替えて得られる列の中で, 挿入ソートによって昇順にソートしたとき, 最も比較回数が多いものを一つ答えよ.
- 5-7. n 個の相異なる要素からなる列 $a[1], \dots, a[n]$ を挿入ソートによってソートする. アルゴリズムとその解析を単純にするために, $a[0]$ を $a[1], \dots, a[n]$ のどれよりも小さい要素 (番兵) とする. 挿入ソートのアルゴリズムは次のように書ける.

```

for  $i \leftarrow 2, \dots, n$  do
     $t \leftarrow a[i]$ 
     $j \leftarrow i - 1$ 
    while  $a[j] > t$  do
         $a[j + 1] \leftarrow a[j]$ 
         $j \leftarrow j - 1$ 
    end while
     $a[j + 1] \leftarrow t$ 
end for

```

$a[1], \dots, a[n]$ の順序はランダムであるものとして, 比較回数の期待値を $C(n)$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (a) $C(1) = 0, C(n) = C(n-1) + \frac{n+1}{2}$ ($n \geq 2$) であることを示せ.
- (b) $C(n)$ を n の式で表せ.