2. 和と漸化式，配列，リスト

- **配列**とは，データを一列に並べ，添字 (index) によって要素を指定できるようにしたデータ構造である．
- **2 分探索**は，ソートされた配列から要素を探すアルゴリズムである．配列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ に対して，$a[0] \le a[1] \le \cdots \le a[n-1]$ が成り立つとする．要素 x が与えられたとき，$a[i] = x$ となる添字 i を次の手順で探す．
  (1) $l = 0, r = n-1$ とする．
  (2) $l < r$ である限り，以下の (i)–(iii) を繰り返す．
    (i) $m = \lfloor (l+r)/2 \rfloor$ とする．
    (ii) $a[m] = x$ ならば，$i = m$ が求める添字であるので終了する．
    (iii) $a[m] < x$ ならば $l = m+1$ とし，そうでないとき $r = m-1$ とする．
  (3) $a[l] = x$ ならば，$i = l$ が求める添字である．そうでないとき，$a[i] = x$ となる添字 i は存在しない．
- **単方向連結リスト**とは，各要素がデータと 1 つのポインタからなり，各要素のポインタは後続要素のアドレスを格納するデータ構造である．単方向連結リストは，指定された要素の直後に要素を追加したり，指定された要素の直後の要素を削除することが容易にできる．
- **双方向連結リスト**とは，各要素がデータと 2 つのポインタからなり，各要素のポインタは先行要素と後続要素のアドレスを格納するデータ構造である．双方向連結リストは，指定された要素の前後に要素を追加したり，指定された要素を削除することが容易にできる．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．配列の添字は 0 から始まるものとする．）

2-1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\log n)$ が成り立つことを示せ．

2-2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = O(n2^n)$ が成り立つことを示せ．

2-3. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$$

で定義する．このとき，$a_n = O\left(3^n\right)$ が成り立つことを示せ．

2-4. 数列 $\{T(n)\}$ を

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$$

で定義する．ただし，実数 x に対して，$\lceil x \rceil$ を x 以上の最小の整数とする．

(a) 非負整数 k に対して，$T(2^k)$ を k の式で表せ．

(b) n を正の整数として，整数 k は $2^{k-1} < n \leq 2^k$ を満たすとする．このとき，$T(n) \leq T(2^k)$ が成り立つことを示せ．

(c) $T(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right)$ が成り立つことを示せ．

2-5. 2 分探索で n 個の要素からなるソートされた配列から要素を探すとき，比較回数は $O(\log n)$ 回であることを示せ．

2-6. 次の表で表される，「S」で始まり「H」で終わる単方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60	70
データ	A	C	E	H	R	S	T
ポインタ	50	40	10	0	70	30	20

リストの先頭を指すポインタは 60 であり，指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストからデータ「R」の直後にあるデータ「T」を削除したい．どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．

2-7. 次の表で表される，「I」で始まり「L」で終わる双方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60	70
データ	A	G	I	L	N	R	T
先行要素へのポインタ	60	70	0	10	30	20	50
後続要素へのポインタ	40	60	50	0	70	10	20

指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストの「T」の直後に新しいデータ「E」を挿入したい．データ「E」のアドレスが 80 であるとき，どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．