アルゴリズム B 演習 No. 1　　　　　　　　　　　　　　　　2016 年 10 月 14 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- b を 2 以上の整数とする．正の整数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \text{ は正の整数}, a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の $\boldsymbol{b}$ **進表記**という．この記数法を $\boldsymbol{b}$ **進法**という．

- 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

$$\text{(a) } (1011)_2 \quad \text{(b) } (11010)_2 \quad \text{(c) } (100111)_2$$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

$$\text{(a) } (10)_{10} \quad \text{(b) } (35)_{10} \quad \text{(c) } (44)_{10}$$

1-3. 任意の正の整数 n に対して，

$$n = \sum_{k=1}^{m} a_k k! \quad (a_k \in \{0, 1, \ldots, k\}\ (k = 1, 2, \ldots, m),\ a_m \neq 0)$$

を満たす正の整数 m と $a_0, a_1, \ldots, a_m$ が一意的に存在することを示せ．

1-4. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．有限な極限値

$$M = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ．（逆は成り立たないことに注意せよ．）

1-5. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

（a）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

（b）$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$.

1-6. 関数 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ に対し，以下が成り立つことを示せ．

（a）$f(n) = O\bigl(h(n)\bigr)$, $g(n) = O\bigl(h(n)\bigr)$ ならば，$f(n) + g(n) = O\bigl(h(n)\bigr)$.

（b）ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$ が成り立つとする．このとき，$g(n) = O\bigl(h(n)\bigr)$ ならば，$f(n)g(n) = O\bigl(f(n)h(n)\bigr)$.

1-7. 次の式が成り立つことを示せ．

（a）$\sqrt{2n^4 + n^2 + 1} = O(n^2)$.

（b）$n^3 + n = o(2^n)$.

1-8. 次の式が成り立つことを示せ．

（a）$\displaystyle n^2 \left(1 + \cos \frac{n\pi}{6}\right) + 3n = O(n^2)$.

（b）$\exp\Bigl(\sqrt{(\log n)(\log \log n)}\Bigr) = o(n)$.