アルゴリズム B 演習 No. 6　　2015 年 11 月 13 日配布

6. ソート (2)

前回と同様に，列 $a[0], a[1], \ldots, a[n-1]$ を昇順に並び替えるものとして説明する．

ヒープソート まず，要素の列から最大値が先頭になるヒープを作る[*1]．次に，ヒープから最大値を取り出し，最後の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする．

クイックソート 要素の列からピボット（枢軸要素）を選ぶ．ピボット未満の要素を左側に，ピボット以上の要素を右側に集め，2 つの部分列を作る．この 2 つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで，要素の列がソートされる．

列 $a[l], \ldots, a[r]$ から 2 つの部分列を作る操作は次のように行うことができる．

1. ピボットを選び，列の右端 $a[r]$ と交換する．
2. $i = l-1,\ j = r$ とする．
3. i を 1 増やす．$a[i] < a[r]$ ならば 3 に戻る．
4. j を 1 減らす．$i < j$ かつ $a[j] \geq a[r]$ ならば 4 に戻る．
5. $i < j$ ならば，$a[i]$ と $a[j]$ を交換し，3 に戻る．
6. $a[i]$ と $a[r]$ を交換する．このとき，次が成り立つ．

$$a[l], \ldots, a[i-1] < a[i], \quad a[i] \leq a[i+1], \ldots, a[r].$$

マージソート 列を 2 つに等分し，それぞれを再帰的にソートする．ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた列を作る．

部分列の結合は次のように行われる．まず新しい空の列を用意しておく．次に，2 つの部分列の先頭を比較し，小さい方を取り除いて新しい列に追加する．この操作を繰り返し，一方の部分列がなくなったら，もう一方の部分列を新しい列に連結する．

問題

- 実数 x に対し，x の切り捨て（x 以下の整数で最大のもの）を $\lfloor x \rfloor$ で表し，x の切り上げ（x 以上の整数で最小のもの）を $\lceil x \rceil$ で表す．
- 解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．

[*1] プリント No. 4 では最小値を先頭にしていたことに注意せよ．

6-1. 次の整数列 $(*)$ をヒープソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

$$95, 85, 71, 17, 37, 30, 58, 32 \qquad (*)$$

6-2. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボット（枢軸要素）として**右端**の数を選ぶものとする．

6-3. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボットとして**左端**の数を選ぶものとする．

6-4. 整数列 $(*)$ をマージソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

以下の問題において，比較回数は列の要素のものだけを数え，添字の比較回数は数えないものとする．

6-5. n 個の要素の列が降順にソートされているとする．この列をヒープソートで昇順にソートするとき，比較回数は $O(n \log n)$ であることを示せ．

6-6. n 個の同じ要素からなる列にクイックソートを行うとき，前ページの手順でこの列を 2 つの部分列に分けるとどのようになるか示せ．

6-7. すでに整列されている n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする．ピボットとして左端の要素を選んだとき，比較回数は $O(n^2)$ になることを示せ．

6-8. n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする．ピボットが一様かつ独立にランダムに選ばれるとき，比較回数の期待値 $E(n)$ は次の関係式を満たす[*2]．

$$E(0) = E(1) = 0, \quad E(n) \leq n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bigl(E(i-1) + E(n-i)\bigr) \ (n \geq 2).$$

この関係式を用いて $E(n) = O(n \log n)$ であることを示せ．

6-9. マージソートにおいてソートされた 2 つの部分列を結合するとき，最も比較回数が少なくなるのはどのようなときか示せ．

6-10. n 個の要素の列をマージソートでソートするとき，比較回数 $C(n)$ は次の関係式を満たす．

$$C(1) = 0, \quad C(n) \leq C\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1 \ (n \geq 2).$$

この関係式を用いて $C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ．

[*2] アルゴリズムの書き方によって関係式は多少異なるが，結論には影響しない．