アルゴリズム B 演習 No. 2 　　　　　　　　　　　　　2015 年 10 月 16 日配布

2. 和と漸化式，配列，リスト

- **配列**とは，データを一列に並べ，添字 (index) によって要素を指定できるようにしたデータ構造である．
- **単方向連結リスト**とは，各要素がデータと 1 つのポインタからなり，各要素のポインタは後続要素のアドレスを格納するデータ構造である．単方向連結リストは，指定された要素の後ろに要素を追加したり，指定された要素の後ろの要素を削除することが容易にできる．
- **双方向連結リスト**とは，各要素がデータと 2 つのポインタからなり，各要素のポインタは先行要素と後続要素のアドレスを格納するデータ構造である．双方向連結リストは，指定された要素の前後に要素を追加したり，指定された要素を削除することが容易にできる．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．配列の添字は 0 から始まるものとする．）

2-1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1) = O(n^3)$ が成り立つことを示せ．

2-2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = O(n\sqrt{n})$ が成り立つことを示せ．

2-3. $0 < r < 1$ とする．$\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} r^k = O(r^n)$ が成り立つことを示せ．

2-4. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

で定義する．このとき，$a_n = O\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ が成り立つことを示せ．

2-5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_n = 2a_{\lceil n/2 \rceil} + n$$

で定義する．ただし，実数 $x$ に対して，$\lceil x \rceil$ で $x$ 以上の最小の整数を表す．

(a) 正の整数 $n$ と非負整数 $k$ に対して，$b(n,k)$ を

$$b(n,0) = n, \quad b(n,k+1) = \left\lceil \frac{b(n,k)}{2} \right\rceil$$

で定義する．$n \geq 2$ に対して，$2^{l-1} < n \leq 2^l$ を満たす整数 $l$ を取ると，次の式が成り立つことを示せ．

$$a_n = \sum_{k=0}^{l-1} 2^k b(n,k).$$

(b) $a_n = O(n \log n)$ を示せ．

2-6. $n$ 個の整数が格納されている配列 $a$ と整数 $x$ に対して，$a[i] = x$ となる添字 $i$ のうち最小のものを求めるアルゴリズムを書け．($a[i] = x$ となる添字 $i$ は存在するとしてよい．)

2-7. 次の表で表される，「C」で始まり「R」で終わる単方向連結リストを考える．

| アドレス | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| データ | C | E | M | O | P | R | T |
| ポインタ | 40 | 60 | 50 | 30 | 70 | 0 | 20 |

リストの先頭を指すポインタは 10 であり，指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストの「P」の直後に新しいデータ「U」を挿入したい．データ「U」のアドレスが 80 であるとき，どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．

2-8. 次の表で表される，「N」で始まり「R」で終わる双方向連結リストを考える．

| アドレス | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| データ | B | E | G | H | I | N | O | R | U |
| 先行要素へのポインタ | 40 | 60 | 50 | 30 | 20 | 0 | 10 | 90 | 70 |
| 後続要素へのポインタ | 70 | 50 | 40 | 10 | 30 | 20 | 90 | 0 | 80 |

指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま，このリストからデータ「U」を削除したい．どのような操作をすればよいか述べ，その結果として得られるリストを上の表のように表せ．