アルゴリズム B 演習 No. 1　　　　2015 年 10 月 9 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- b を 2 以上の整数とする．正の整数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \text{ は正の整数}, \, a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}, \, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の $\boldsymbol{b}$ **進表記**という．この記数法を $\boldsymbol{b}$ **進法**という．

- 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\big(g(n)\big)$$

    と表す．
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある非負整数 n_0 が存在して，任意の非負整数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\big(g(n)\big)$$

    と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(1100)_2$　(b) $(11011)_2$　(c) $(101010)_2$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

(a) $(9)_{10}$　(b) $(30)_{10}$　(c) $(53)_{10}$

以下の問題では，10, 11, . . . , 15 を 16 進法で表すのに A, B, . . . , F を用いる．

1-3. 16 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(\mathrm{D6})_{16}$　(b) $(213)_{16}$　(c) $(\mathrm{EB0F})_{16}$

1-4. 10 進法で表された次の数を 16 進法で表せ．

(a) $(46)_{10}$　(b) $(2530)_{10}$　(c) $(42221)_{10}$

1-5. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．有限な極限値

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\big(g(n)\big)$ が成り立つことを示せ．（逆は成り立たないことに注意せよ．）

1-6. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$f(n) \geq 0$, $g(n) > 0$ が成り立つとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(b) $f(n) = o\big(g(n)\big)$.

1-7. 次の式が成り立つことを示せ．

(a) $10n^3 - 9n^2 + 4n = O(n^3)$.

(b) $(\log n)^2 = o(n)$.

1-8. 次の式が成り立つことを示せ．

(a) $\displaystyle\frac{1+|\sin n|}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(b) $2^n + n^5 + \log n = o(3^n)$.

1-9. 関数 $f(n)$, $g(n)$ を考える．ある実数 $m > 0$ と非負整数 N が存在して，$n \geq N$ を満たす任意の非負整数 n に対して，$\log f(n) \geq 0$, $\log g(n) \geq m$ が成り立つとする．このとき，$f(n) = O(g(n))$ が成り立つならば，$\log f(n) = O(\log g(n))$ が成り立つことを示せ．

1-10. $f(n) = O(g(n))$ は成り立つが，$2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ は成り立たないような関数 $f(n)$, $g(n)$ の例を挙げよ．