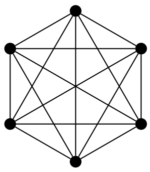
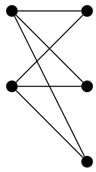
離散数学入門 a レポート課題 No. 2

解答例

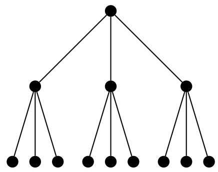
1. (a)



(b)



(c)



2. （a）$\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 1$, $\deg(v_5) = 0$.

（b）孤立点：v_5，端点：v_4，奇頂点：v_3, v_4，偶頂点：v_1, v_2, v_5.

（c）

$$A[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

（d）

$$A[G]^4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 11 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから，長さ 4 の v_1v_2 道は 6 個ある．

3. （a）G はオイラーグラフである．

（理由）$i = 1, 2$ に対して $\deg(v_i) = 4$ であり，$i = 3, 4, 5, 6$ に対して $\deg(v_i) = 2$ である．よって，すべての頂点が偶頂点であるから，オイラーの定理から G がオイラーグラフになることがわかる．

（別解）$C = \langle v_1, v_3, v_2, v_4, v_1, v_5, v_2, v_6, v_1 \rangle$ とすると，C はオイラー閉路である．（オイラー閉路は他にもある．）

（b）G はハミルトングラフではない．

（理由）$V_1 = \{v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ とすると，この頂点集合の分割によって G は 2 部グラフになる．2 部グラフの閉路は V_1 と V_2 の頂点を同じ数だけ含む（始点と終点はまとめて 1 個と数える）．よって，G がハミルトン閉路 C を持つと仮定すると，C はすべての頂点をちょうど 1 度ずつ含んでいるから，$|V_1| = |V_2|$ となる．ところが，$|V_1| = 2$, $|V_2| = 4$ だから，G はハミルトン閉路を持たない．

4. G の各辺に対し，それに接続する頂点が 2 個ずつある．このように数えたとき，各頂点はその次数とちょうど同じ回数だけ数えられるから，

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v).$$

両辺を 2 で割ると与式が得られる．