離散数学入門 a レポート課題 No. 1
解答例

1. (a) $A \cap B = \{0, 2\}$.
   (b) $B \oplus C = \{4, 5, 6\}$.
   (c) $\overline{A \cup C} = \{4, 6, 7\}$.
   (d) $2^C = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{5\}, \{0, 2\}, \{0, 5\}, \{2, 5\}, \{0, 2, 5\}\}$.
2. (a) (iii) 単射であるが全射でない．
   理由：$m, n \in \mathbb{Z}$ として，$f(m) = f(n)$ とすると，$2m = 2n$ だから，$m = n$ である．よって f は単射である．また，$1 \in \mathbb{Z}$ であるが，$f(n) = 1$，すなわち，$2n = 1$ となる $n \in \mathbb{Z}$ は存在しない．よって f は全射でない．
   (b) (iv) 全単射である．
   理由：$x, y \in \mathbb{R}$ として，$g(x) = g(y)$ とすると，$x^3 = y^3$ だから，$x = y$ である．よって g は単射である．また，任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し，$x = \sqrt[3]{y}$ とおくと，$g(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$ である．よって，g は全射である．
3. 真理表は次のようになるから，$(\neg p) \vee q$ と $p \Rightarrow q$ は論理的に等しい．

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \Rightarrow q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	F	T	T

4. (a) n に関する数学的帰納法で証明する．$n = 0$ のとき，(左辺) $= 0 \cdot 1 = 0$，(右辺) $= \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$ だから，等式は成り立つ．
   $n = k$ のとき等式が成り立つと仮定すると，

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

   $n = k + 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

   となり，等式は成り立つ．
   以上より，すべての自然数 n に対して等式が成り立つことが証明された．
   (b) n に関する数学的帰納法で証明する．$n = 0$ のとき，(i) より $f(0) \geqq 1 = (0+1)^2$ だから不等式は成り立つ．
   $k \in \mathbb{N}$ として，$n \leqq k$ のとき不等式が成り立つとする．$n = k + 1$ のときを考える．
   k が偶数のとき，$k = 2l$ とおくと，$l \geqq 0$ である．(iii) より，

$$f(n) = f(2l+1) \geqq 4f(l).$$

$l \leqq k$ だから，帰納法の仮定より，$f(l) \geqq (l+1)^2$ である．よって，

$$f(n) \geqq 4(l+1)^2 = (2l+2)^2 = (n+1)^2$$

となり，不等式は成り立つ．

k が奇数のとき，$k = 2l-1$ とおくと，$l \geq 1$ である．(ii) より，

$$f(n) = f(2l) \geqq 4f(l).$$

$k - l = l - 1 \geqq 0$ より，$l \leqq k$ である．よって，帰納法の仮定より，$f(l) \geqq (l+1)^2$ である．ゆえに，

$$f(n) = \geqq 4(l+1)^2 = (2l+2)^2 = (n+2)^2 \geqq (n+1)^2$$

となり，不等式は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して不等式 $f(n) \geqq (n+1)^2$ が成り立つことが証明された．

5. (a)（反射律）$A \in 2^X$ とする．このとき，恒等関数（恒等写像）$\mathrm{id}_A \colon A \to A$ は全単射である．よって，$A \sim A$ である．

（対称律）$A, B \in 2^X$, $A \sim B$ とする．このとき，A から B への全単射 f が存在する．f は全単射だから，逆関数 f^{-1} が存在する．f^{-1} は B から A への全単射だから，$B \sim A$ である．

（推移律）$A, B, C \in 2^X$, $A \sim B$, $B \sim C$ とする．このとき，全単射 $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ が存在する．f と g の合成 $g \circ f$ は A から C への全単射となるから，$A \sim C$ である．

以上より，2^X の上の関係 $\sim$ は同値関係である．

(b) まず，$2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ であることに注意する．$A \in 2^X$ に対し，関数 $f \colon \emptyset \to A$ が全射となるのは $A = \emptyset$ のときに限る．よって，$\emptyset$ を含む同値類 $[\emptyset]_\sim$ は $[\emptyset]_\sim = \{\emptyset\}$ となる．

次に，関数 $f \colon \{0,1\} \to \{0\}$ を考える．関数 f は $f(0) = f(1) = 0$ で定まるものただ 1 つであるが，この式から f は単射でない．よって，$\{0,1\} \nsim \{0\}$ である．同様にして，$\{0,1\} \nsim \{1\}$ であることがわかる．よって，$\{0,1\}$ を含む同値類 $[\{0,1\}]_\sim$ は $[\{0,1\}]_\sim = \{\{0,1\}\}$ となる．

最後に，関数 $g \colon \{0\} \to \{1\}$ を考えると，g は $g(0) = 1$ で定まるものただ 1 つである．この式から g は全単射であり，$\{0\} \sim \{1\}$ である．よって，$\{0\}$ を含む同値類 $[\{0\}]_\sim$ は $[\{0\}]_\sim = \{\{0\}, \{1\}\}$ となる．特に，$[\{0\}]_\sim = [\{1\}]_\sim$ である．

以上より，商集合 $2^X/\sim$ は次のように表される．

$$2^X/\sim = \{\{\emptyset\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0,1\}\}\}.$$

注意． A, B が有限集合のとき，A から B への全単射が存在することと $|A| = |B|$ であることは同値である．このことを用いて商集合 $2^X/\sim$ を求めることもできる．