離散数学入門 a レポート課題 No. 1
2014 年 5 月 20 日配布
提出日：2014 年 6 月 3 日

注意

- 6 月 3 日の講義の際に提出すること．
- 1 枚目に所属コース・学修番号・氏名を書くこと．
- レポートが複数枚にわたるときは，左上をホッチキス等で綴じること．
- A4 レポート用紙を使用し，表面のみに解答すること．

問題

1. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A = \{0,1,2,3\}$，$B = \{0,2,4,6\}$，$C = \{0,2,5\}$ に対して，次の集合を求め，要素を列挙して表せ．ただし，U の部分集合 X, Y に対して，$X \oplus Y$ は X と Y の対称差，$\overline{X}$ は X の補集合，2^X は X のべき集合をそれぞれ表す．

$$\text{(a) } A \cap B \quad \text{(b) } B \oplus C \quad \text{(c) } \overline{A \cup C} \quad \text{(d) } 2^C$$

2. 次の関数 (a), (b) について，(i)–(iv) から当てはまるものを 1 つずつ選び，その理由を説明せよ．

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z};\ n \mapsto 2n$
(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3$

(i) 全射でも単射でもない．
(ii) 全射であるが単射でない．
(iii) 単射であるが全射でない．
(iv) 全単射である．

3. p, q を命題とする．命題 $(\neg p) \vee q$ と $p \Rightarrow q$ の真理表を書き，この 2 つが論理的に等しいことを示せ．

4. 次の主張を数学的帰納法で証明せよ．（この講義では 0 を自然数に含めていることに注意せよ．）

（a）すべての自然数 n に対して次の等式が成り立つ．

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

（b）関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすならば，すべての自然数 n に対して $f(n) \geqq (n+1)^2$ が成り立つ．

(i) $f(0) \geqq 1$.
(ii) 1 以上のすべての自然数 n に対して，$f(2n) \geqq 4f(n)$ が成り立つ．
(iii) すべての自然数 n に対して，$f(2n+1) \geqq 4f(n)$ が成り立つ．

5. $X = \{0,1\}$ とする．X のべき集合 2^X の上の関係 $\sim$ を

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

によって定義する．以下の問いに答えよ．

（a）$\sim$ が同値関係であることを示せ．

（b）商集合 $2^X/\sim$ を求め，要素を列挙して表せ．