離散数学入門 a　期末試験 2014 年 7 月 29 日

注意

- 答案用紙に 2 枚とも所属・学修番号・氏名を書くこと．
- 答案用紙の裏面を用いてもよい．
- 記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする．

問題

1. $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を全体集合とする．U の部分集合
$$A = \{0,1,2,3,4\}, \quad B = \{2,4,6\}, \quad C = \{n \in U \mid n \text{ は } 3 \text{ の倍数 }\}$$
に対して，次の集合を求め，要素を列挙して表せ．ただし，U の部分集合 X, Y に対して，$X - Y$ は X と Y の差集合，$X \oplus Y$ は X と Y の対称差，$\overline{X}$ は X の補集合，2^X は X のべき集合をそれぞれ表す．
$$\text{(a) } \overline{A - B} \quad \text{(b) } A \oplus C \quad \text{(c) } (A \cap B) \times C \quad \text{(d) } 2^C$$

2. 以下の問いに答えよ．
（a）5 次対称群 $(S_5, \circ)$ を考える．S_5 の要素
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
に対して，φ^2 と $\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ を求め，上のように表せ．
（b）環 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ のうち，体であるものをすべて挙げ，その体において $[2]$ の逆元を求めよ．ただし，$[2]$ は 2 が属する同値類（剰余類）を表す．

3. 次のグラフを図示せよ．
（a）完全 2 部グラフ $K_{3,3}$
（b）高さ 3 の完全 2 分木

4. グラフ G の隣接行列 $A[G]$ が次の式で与えられるとして，以下の問いに答えよ．
$$A[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
（a）グラフ G を図示せよ．
（b）グラフ G はオイラーグラフであるかどうか，理由とともに答えよ．
（c）グラフ G は平面的グラフかどうか，理由とともに答えよ．
（d）グラフ G における長さ 4 の閉路の個数を求めよ．ただし，閉路は同じ頂点や辺を何度含んでもよいものとし，始点が異なる閉路や回り方が異なる閉路は別の閉路として数えるものとする．

5. 1 から 5 までの数字が書かれた札がそれぞれ 4 枚ずつ，計 20 枚あるとする．同じ数字が書かれた札は区別できないものとして，以下の問いに答えよ．
（a）この 20 枚の札から 4 枚引いて並べる並べ方は何通りあるか求めよ．
（b）この 20 枚の札から 4 枚引く組合わせは何通りあるか求めよ．
（c）この 20 枚の札から 6 枚引く組合わせは何通りあるか求めよ．

6. $n \geqq r$ を満たす任意の正の整数 n, r に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$(r+1) \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{P}_r = {}_{n+1}\mathrm{P}_{r+1}.$$