離散数学入門 a　中間試験　　2014 年 6 月 10 日

注意

- 答案用紙に 2 枚とも所属・学修番号・氏名を書くこと．
- 答案用紙の裏面を用いてもよい．
- 0 は自然数であるものとする．したがって，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ である．
- その他，記号・用語等は講義内で説明したものに従うものとする．

問題

1. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする．U の部分集合

$$A = \{0, 1, 2, 4, 6\}, \quad B = \{n \in U \mid n \text{ は奇数 }\}, \quad C = \{2, 3, 5, 7\}$$

に対して，次の集合を求め，要素を列挙して表せ．ただし，U の部分集合 X, Y に対して，$X - Y$ は X と Y の差集合，$X \oplus Y$ は X と Y の対称差，$\overline{X}$ は X の補集合，2^X は X のべき集合をそれぞれ表す．

(a) $A - C$　(b) $B \oplus C$　(c) $\overline{A \cup B}$　(d) $2^{B \cap C}$

2. 次の関数 (a), (b) について，(i)–(iv) から当てはまるものを 1 つずつ選び，その理由を説明せよ．

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N};\ n \mapsto |n|$ （$|n|$ は n の絶対値）　(b) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q};\ x \mapsto x^3$

(i) 全射でも単射でもない．
(ii) 全射であるが単射でない．
(iii) 単射であるが全射でない．
(iv) 全単射である．

3. 4 次対称群 $(S_4, \circ)$ を考える．S_4 の要素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，$\sigma \circ \varphi$, $\varphi \circ \sigma$, φ^{-1}, σ^2 を求め，上のように表せ．

4. m を正の整数として，環 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を考える．以下の問いに答えよ．
   (a) 環 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の（加法および乗法の）演算表を書け．ただし，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の要素は $[a]$ $(0 \leqq a \leqq m-1)$ の形で表すものとする．（$[a]$ は a が属する同値類（剰余類）である．）
   (b) 環 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ のうち，体であるものをすべて挙げよ．
5. n が 4 以上の自然数のとき，$2^n \geqq n^2$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ．