

10. 合同式

- a, b を整数, n を自然数とする. $a - b$ が n で割り切れるとき, a と b は n を法として合同であるといい, $a \equiv b \pmod{n}$ と表す.
- 上で定義した関係 $\equiv \pmod{n}$ は \mathbb{Z} 上の同値関係であり, この同値関係による \mathbb{Z} の商集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で表す. $a \in \mathbb{Z}$ が属する同値類を $a \bmod n$ で表す.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に演算 $+, \cdot: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を次のように定める.

$$(a \bmod n) + (b \bmod n) = (a + b) \bmod n, \quad (a \bmod n) \cdot (b \bmod n) = ab \bmod n.$$

このとき, 演算 $+, \cdot$ によって $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は可換環となる.

- 以上の議論は次のように言い換えられる. $n\mathbb{Z}$ を n の倍数全体がなす \mathbb{Z} のイデアルとすると, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} の $n\mathbb{Z}$ による剰余環である.
- $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が単元または可逆元であるとは, $y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が存在して, $xy = 1 \bmod n$ となることをいう. y を x の逆元という. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元全体を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ で表す. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は乗法に関して可換群をなす.
- a を整数, n を自然数とする. $a \bmod n$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元であることと, a と n が互いに素であることは同値である. $a \bmod n$ が単元であるとき, その逆元は次のように計算できる. $ax + ny = 1$ を満たす整数 x, y を拡張ユークリッドの互除法 (No. 9) により求める. このとき, $a \bmod n$ の逆元は $x \bmod n$ である.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元の個数を $\varphi(n)$ で表すと, 関数 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が定まる. これをオイラーの φ 関数という. $\varphi(1) = 1$ であることに注意する.
- m, n を互いに素な自然数とする. このとき, 写像

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \\ a \bmod mn &\mapsto (a \bmod m, a \bmod n) \end{aligned}$$

は well-defined であり, 環同型である. これを中国剰余定理という.

問題

解答に際して、その問題より前にある問題の結果を用いてもよい。

10-1. 拡張ユークリッドの互除法を用いて、 $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ における $19 \pmod{48}$ の逆元を求めよ。

10-2. $24x \equiv 17 \pmod{29}$ を満たす整数 x で、 $0 \leq x \leq 28$ を満たすものを求めよ。

10-3. m, n を互いに素な自然数、 a, b を整数とする。 r, s を $rn + sm = 1$ を満たす整数とする。このとき、 $x = arn + bsm$ とおくと、 $x \equiv a \pmod{m}$ かつ $x \equiv b \pmod{n}$ となることを示せ。

10-4. $x \equiv 6 \pmod{23}$, $x \equiv 7 \pmod{31}$ を満たす整数 x を一つ求めよ。

10-5. m, n を自然数とし、 a を $0 \leq a < n$ を満たす整数とする。繰り返し二乗法を用いて $a^m \pmod{n}$ を計算するときのビット演算量が $O((\log m)(\log n)^2)$ であることを示せ。

10-6. $12^{17} \pmod{59}$ を計算せよ。

10-7. m, n を互いに素な自然数とする。このとき、 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ であることを示せ。

10-8. n を 2 以上の自然数とし、 $n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$ と素因数分解されているとする。ただし、 p_1, \dots, p_r は相異なる素数である。このとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

10-9. $\varphi(90)$ の値を求めよ。

10-10. a を整数、 n を自然数とする。 a と n が互いに素ならば、 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ が成り立つことを示せ。

10-11. $x^{103} \equiv 32 \pmod{209}$ を満たす整数 x を一つ求めよ。(209 = 11 · 19 に注意せよ。)