

6. ソート (2)

ヒープソート まず, 要素の列から最大値が先頭になるヒープを作る*1. 次に, ヒープから最大値を取り出し, 最後の要素と交換する操作を繰り返すことでソートする.

クイックソート 要素の列からピボット (枢軸要素) を選ぶ. ピボット未満の要素を左側に, ピボット以上の要素を右側に集め, 2 つの部分列を作る. この 2 つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで, 要素の列がソートされる.

列 $a[l], \dots, a[r]$ から 2 つの部分列を作る操作は次のように行うことができる.

1. ピボットを選び, 列の右端 $a[r]$ と交換する.
2. $i = l, j = r - 1$ とする.
3. i を 1 ずつ増やし, ピボット以上の要素 $a[i]$ を探す.
4. j を 1 ずつ減らし, ピボット未満の要素 $a[j]$ を探す. 見つからないときは $j = l - 1$ とする.
5. $i < j$ ならば, 3 と 4 で見つかった要素を交換し, 3 に戻る.
6. $a[i]$ と $a[r]$ を交換する. このとき, 次が成り立つ.

$$a[l], \dots, a[i-1] < a[i], \quad a[i] \leq a[i+1], \dots, a[r].$$

マージソート 列を 2 つに等分し, それぞれを再帰的にソートする. ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた列を作る.

部分列の結合は次のように行われる. まず新しい空の列を用意しておく. 次に, 2 つの部分列の先頭を比較し, 小さい方を取り除いて新しい列に追加する. この操作を繰り返し, 一方の部分列がなくなったら, もう一方の部分列を新しい列に連結する.

問題

- 実数 x に対し, x の切り捨て (x 以下の整数で最大のもの) を $\lfloor x \rfloor$ で表し, x の切り上げ (x 以上の整数で最小のもの) を $\lceil x \rceil$ で表す.
- 解答に際して, その問題より前にある問題の結果を用いてもよい.

*1 プリント No. 4 では最小値を先頭にしていただけに注意せよ.

6-1. 次の整数列 (*) をヒープソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

$$98, 56, 31, 50, 29, 97, 55, 54 \quad (*)$$

6-2. 整数列 (*) をクイックソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。ただし、ピボット（枢軸要素）として右端の数を選ぶものとする。

6-3. 整数列 (*) をクイックソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。ただし、ピボットとして左端の数を選ぶものとする。

6-4. 整数列 (*) をマージソートによって昇順にソートし、その経過を図示せよ。

以下の問題において、比較回数は列の要素のものだけを数え、添字の比較回数は数えないものとする。

6-5. n 個の要素を持つヒープに要素を追加するとき、または最大値を削除するとき、最悪の場合の比較回数はともに $O(\log n)$ である。これを用いて、 n 個の要素の列をヒープソートでソートするとき、最悪の場合の比較回数は $O(n \log n)$ であることを示せ。

6-6. すでに整列されている n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする。ピボットとして右端の要素を選んだとき、比較回数は $O(n^2)$ になることを示せ。

6-7. n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする。2つの部分列を作るとき、常に部分列の長さの差が1以下であるとする。このとき、比較回数の最大値を $C(n)$ とすると、次の式が成り立つ*2。

$$C(0) = C(1) = 0, \quad C(n) = n + 1 + C\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + C\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) \quad (n \geq 2).$$

これを用いて、 $C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ。（すなわち、最良の場合の比較回数は $O(n \log n)$ である。）

6-8. マージソートにおいて2つの部分列を結合するとき、この部分列の長さがともに n 以下であるとする、最悪の場合の要素の比較回数は $O(n)$ であることを示せ。

6-9. n 個の要素の列をマージソートでソートするとき、最悪の場合の要素の比較回数は $O(n \log n)$ であることを示せ。

*2 アルゴリズムの書き方によって漸化式は多少異なるが、結論には影響しない。