アルゴリズム B 演習 No. 1　　　　2014 年 10 月 10 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ を自然数全体の集合とする．b を 2 以上の自然数とする．自然数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \in \mathbb{N},\, a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\},\, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \ldots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の ***b* 進表記**という．この記数法を ***b* 進法**という．

- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非負実数全体の集合とする．関数 $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と自然数 n_0 が存在して，任意の自然数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある自然数 n_0 が存在して，任意の自然数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す．

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい．）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．

(a) $(1001)_2$　(b) $(10110)_2$　(c) $(101111)_2$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ．

(a) $(14)_{10}$　(b) $(25)_{10}$　(c) $(42)_{10}$

1-3. 8 進法で表された次の数を 10 進法で表せ.

$$\text{(a) } (55)_8 \quad \text{(b) } (647)_8 \quad \text{(c) } (1341)_8$$

1-4. 10 進法で表された次の数を 8 進法で表せ.

$$\text{(a) } (57)_{10} \quad \text{(b) } (90)_{10} \quad \text{(c) } (511)_{10}$$

1-5. 関数 $f, F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が $f(n) = O\bigl(F(n)\bigr)$ を満たすとし，$a > 0$ を実定数とする．このとき，$af(n) = O\bigl(F(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ.

1-6. 関数 $f, g, F, G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が，$f(n) = O\bigl(F(n)\bigr)$, $g(n) = O\bigl(G(n)\bigr)$ を満たすとする.このとき，$f(n) + g(n) = O\bigl(\max\{F(n), G(n)\}\bigr)$ が成り立つことを示せ.

1-7. 関数 $f, g, F, G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が，$f(n) = o\bigl(F(n)\bigr)$, $g(n) = O\bigl(G(n)\bigr)$ を満たすとする.このとき，$f(n)g(n) = o\bigl(F(n)G(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ.

1-8. 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考え，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ が成り立つとする.有限な極限値

$$M = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ.（逆は成り立たないことに注意せよ.）

1-9. 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考え，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ が成り立つとする.このとき，以下は同値であることを示せ.

（a）$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

（b）$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$.

1-10. 次の式が成り立つことを示せ.

（a）$2n^4 - 5n^3 + 10n = O(n^4)$.

（b）$\displaystyle\frac{n}{1 + \log n} = o(n)$.

1-11. 次の式が成り立つことを示せ.

（a）$\displaystyle\frac{5^n + 2^n}{4^n + 3^n} = O\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)$.

（b）$n^{10} = o(e^n)$.