離散数学入門 b レポート課題 No. 1
解答例

1. (a) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.
   (b) $A \cup C = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$.
   (c) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.
   (d) $A \cup (\overline{B} \cap C) = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
2. (a) $A = \{3 \times 1, 3 \times 2, \ldots, 3 \times 100\}$ だから，$\underline{n(A) = 100}$ である．
   (b) $A \cap B = \{n \mid n \in U, n = 21k, k \in \boldsymbol{N}\}$ である．よって，$A \cap B = \{21 \times 1, 21 \times 2, \ldots, 21 \times 14\}$ だから，$\underline{n(A \cap B) = 14}$ である．
   (c) $B = \{7 \times 1, 7 \times 2, \ldots, 7 \times 42\}$ だから，$n(B) = 42$ である．よって，$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 100 + 42 - 14 = \underline{128}$.
   (d) $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 300 - 42 = \underline{258}$.
   (e) $n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 42 - 14 = \underline{28}$.
3. (a) 否定：$\exists x \in \boldsymbol{Z}, x \notin \boldsymbol{N}$.
   $x = -1$ とすると，$x \in \boldsymbol{Z}$ であるが，$x \notin \boldsymbol{N}$ であるから，この命題は 真 である．
   (b) 否定：$\forall x \in \boldsymbol{R}, x^2 + x \geq 0$.
   $x = -\dfrac{1}{2}$ とすると，$x^2 + x = -\dfrac{1}{4} < 0$ であるから，この命題は 偽 である．
4. (a) $x^2 \geq 1 \iff x \leq -1 \vee x \geq 1$ であるから，$p \Rightarrow q$ は成り立つが，$q \Rightarrow p$ は成り立たない．よって，(3) p は q の十分条件であるが，必要条件ではない．
   (b) $x = 1$, $y = -2$ とすると，p は真であるが，q は偽である．また，$x = -1$, $y = 2$ とすると，q は真であるが，p は偽である．よって，$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ はともに成り立たないので，(4) p は q の必要条件でも十分条件でもない．
   (c) 2 次方程式を解くことにより，$x^2-2x+1 = 0 \iff x = 1$ が成り立つことがわかる．よって，$q \Rightarrow p$ は成り立つが，$p \Rightarrow q$ は成り立たないので，(2) p は q の必要条件であるが，十分条件ではない．
   (d) $q \Rightarrow p$ は代入することで成り立つことがわかる．$p \Rightarrow q$ の対偶を考えると，$x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 0$ である．いま，$x \neq 0$ とすると，$x^2 > 0$ であり，$y^2 \geq 0$ だから，$x^2 + y^2 > 0$ が成り立つ．同様に，$y \neq 0$ のときも $x^2 + y^2 > 0$ が成り立つ．したがって，$p \Rightarrow q$ の対偶がなりたつから，$p \Rightarrow q$ も成り立つ．以上より，(1) p は q の必要十分条件である．
5.

$$\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$