離散数学入門 b　期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2013 年 7 月 23 日

問題

1. $U = \{n \mid n \in \boldsymbol{N}, 1 \leqq n \leqq 400\}$ を全体集合とする．U の部分集合 A_1, A_2, A_3 を

$$A_1 = \{n \mid n \in U, n \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},\ A_2 = \{n \mid n \in U, n \text{ は } 4 \text{ の倍数}\},\ A_3 = \{n \mid n \in U, n \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}$$

で定義する．次の集合の要素の個数を求めよ．ただし，U の部分集合 B の補集合を $\overline{B}$ で表す．

(a) $n(A_1)$　(b) $n(A_2 \cap A_3)$　(c) $n(A_2 \cup A_3)$　(d) $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$　(e) $n(\overline{A_1} \cup \overline{A_3})$

2. $x, y \in \boldsymbol{R}$ とする．次の (a), (b) について，当てはまるものを (1)–(4) の中から 1 つずつ選べ．
   (a) $p = [x > 0 \wedge y > 0]$, $q = [x + y > 0 \wedge xy > 0]$.
   (b) $p = [x \geqq 2]$, $q = [x^2 - x - 2 \geqq 0]$.

   (1) p は q の必要十分条件である．
   (2) p は q の必要条件であるが，十分条件ではない．
   (3) p は q の十分条件であるが，必要条件ではない．
   (4) p は q の必要条件でも十分条件でもない．

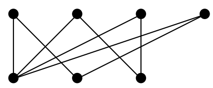
3. 4 次対称群 $(S_4; \circ)$ を考える．S_4 の要素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，$\varphi \circ \sigma$, σ^{-1}, φ^{-1}, $\varphi \circ \varphi$, $\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma$ を求め，上のように表せ．

4. 次の場合の数を求めよ．
   (a) 区別できないサイコロを 4 個投げたとき，目の出方は何通りあるか．
   (b) 5 桁の自然数のうち，一の位から逆に書いても同じ数になるもの（例えば，12321, 72327 など）は何個あるか．ただし，自然数は十進法で表し，先頭は 0 でないものとする．

5. 次のグラフ G について，以下の問いに答えよ．



   (a) グラフ G はオイラーグラフかどうか判定せよ．また，G がオイラーグラフならばオイラー閉路を一つ図示し，G がオイラーグラフでないならばその理由を述べよ．
   (b) グラフ G がハミルトングラフかどうか判定せよ．また，G がハミルトングラフならばハミルトン閉路を一つ図示せよ．（G がハミルトングラフでないときは答えのみでよい．）

6. $G = (V, E)$ をグラフとし，$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ とする．グラフ G の接続行列 M が次で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) グラフ G を図示せよ．
   (b) グラフ G の隣接行列 A を求めよ．
   (c) 長さ 3 の P_1-P_3 経路の数を求めよ．