アルゴリズム B 演習 No. 6 2013 年 11 月 22 日配布

6. ソート (2)・2 分探索

実数 x に対し，x の切り捨て（x 以下の整数で最大のもの）を $\lfloor x \rfloor$ で表し，x の切り上げ（x 以上の整数で最小のもの）を $\lceil x \rceil$ で表す．

クイックソート 要素の列からピボット（枢軸要素）を選ぶ．ピボット以下の要素を左側に，ピボット以上の要素を右側に集め，2 つの部分列を作る．この 2 つの部分列に対して同じ操作を再帰的に実行することで，要素の列がソートされる．

2 つの部分列を作る操作は次のように行うことができる．まずピボットを列の左端と交換しておく．次にピボットの右隣の要素から順に右へ向かってピボット以上の要素を探し，列の右端から左に向かってピボット以下の要素を探す．要素が 2 つ見つかったらその要素を交換する．これを繰り返し，探している位置が交差したら，その位置より左にはピボット以下の要素だけがあり，右にはピボット以上の要素だけがある．最後にピボットを左側の部分列内で右端の要素と交換する（左側の部分列が空のときはそのままでよい）．このとき，ピボット以下の要素の部分列，ピボット，ピボット以上の要素の部分列に列が分割されている．

マージソート 列を 2 つに分割し，それぞれを再帰的にソートする．ソートされた 2 つの部分列を結合してソートされた列を作る．

部分列の結合は次のように行われる．まず新しい空の列を用意しておく．次に，2 つの部分列の先頭を比較し，小さい方を取り除いて新しい列に追加する．この操作を繰り返し，一方の部分列がなくなったら，もう一方の部分列を新しい列に連結する．

2 分探索 **2 分探索** (binary search) は，ソートされた列から要素を探索するアルゴリズムである．相異なる要素からなる昇順にソートされた列 $a[1] < a[2] < \cdots < a[n]$ を考える．この中から要素 x を探すとする．まず，$m = \lceil n/2 \rceil$ として，探索する要素 x と列の中央の要素 $a[m]$ を比較する．一致すればそれで終了である．$x < a[m]$ のとき，部分列 $a[1], a[2], \ldots, a[m-1]$ に対して，$x > a[m]$ のとき，部分列 $a[m+1], a[m+2], \ldots, a[n]$ に対して，再帰的に同じ操作を繰り返す．部分列がなくなったら探索は失敗である（x は列 $a[1], a[2], \ldots, a[n]$ の中にはない）．

問題

6-1. 次の整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボット（枢軸要素）として**左端**の数を選ぶものとする．

$$87, 52, 96, 40, 99, 60, 23, 51 \tag{$*$}$$

6-2. 整数列 $(*)$ をクイックソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．ただし，ピボットとして**右端**の数を選ぶものとする．

6-3. 整数列 $(*)$ をマージソートによって昇順にソートし，その経過を図示せよ．

6-4. 次の整数列から 36 を 2 分探索で探索する経過を図示せよ．また，比較回数は何回か？

$$10, 21, 36, 51, 60, 64, 80, 86$$

6-5. すでに整列されている n 個の相異なる要素の列をクイックソートによってソートする．ピボットとして左端の要素を選んだとき，比較回数は $O(n^2)$ になることを示せ．

6-6. n 個の要素の列をクイックソートによってソートする．要素の順序がランダムであるとき，クイックソートの比較回数の期待値を $C(n)$ とする．このとき，次の式が成り立つ [*1]．

$$C(0) = C(1) = 0, \quad C(n) = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bigl(C(i-1) + C(n-i)\bigr)\ (n \geq 2).$$

このことを用いて，$C(n) = O(n \log n)$ であることを示せ．

6-7. n 個の要素の列をマージソートによってソートするとき，最悪時の比較回数を $C(n)$ とする．

(a) $C(1) = 0$, $C(n) \leq C(\lfloor n/2 \rfloor) + C(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$ $(n \geq 2)$ であることを示せ．

(b) $n = 2^k$（k は非負整数）のとき，$C(n) \leq n \log_2 n$ であることを示せ．

6-8. n 個の相異なる要素からなるソートされた列から 2 分探索で要素を探索するとき，最悪の場合の比較回数は $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ であることを示せ．

[*1] アルゴリズムの書き方によって漸化式は多少異なるが，結論には影響しない．