アルゴリズム B 演習 No. 4 2013 年 11 月 8 日配布

4. **ハッシュ・再帰**

- **ハッシュ表**は，順序構造を用いずに，要素の追加，削除，参照がほぼ定数時間でできるようなデータ構造である．要素の格納場所を決めるために，ハッシュ関数と呼ばれる関数を用いる．いくつかの要素のハッシュ値が等しくなった場合を扱う方法として以下のものがある．
  - **チェイン法**では，ハッシュ値が等しい要素をリストに格納する．ハッシュ表にはリストへのポインタが格納されている．
  - **開番地法** (open addressing, **オープン法**などともいう) では，リストを使わず，ハッシュ表そのものに要素を格納する．
    要素の追加の際，ハッシュ値を計算し，ハッシュ表の対応する場所に要素が入っていなければその場所に格納する．要素が入っていた場合は次の場所を調べ，要素が入っていなければその場所に格納する．以下同様に繰り返す．
    要素の削除の際は，ハッシュ表の対応する場所に「削除済み」の印を付ける．
    要素の探索の際には,「削除済み」の場所は飛ばして次を調べる．

問題

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $\lfloor x \rfloor$ と表す．（$[x]$ と表すこともある．）

以下では，ハッシュ関数は文字列の文字数をハッシュ値として返すものとする．また，ハッシュ表の大きさは 7 であり，1 から 7 までの整数で位置を指定するものとする．

4-1. チェイン法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の追加）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

insert(red) → insert(orange) → insert(yellow) →
insert(green) → insert(blue) → delete(orange)

4-2. チェイン法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の追加）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

insert(violet) → insert(indigo) → insert(blue) → insert(green) →
insert(yellow) → insert(orange) → insert(red) → delete(indigo)

4-3. 開番地法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の追加）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

$$\text{insert(red)} \to \text{insert(orange)} \to \text{insert(yellow)} \to \text{insert(green)} \to \text{insert(blue)} \to \text{delete(orange)}$$

4-4. 開番地法を用いた空のハッシュ表に対し，次のように insert（要素の追加）と delete（要素の削除）を行ったとき，最終的なハッシュ表を図示せよ．

$$\text{insert(violet)} \to \text{insert(indigo)} \to \text{insert(blue)} \to \text{insert(green)} \to \text{insert(yellow)} \to \text{insert(orange)} \to \text{insert(red)} \to \text{delete(indigo)}$$

4-5. 整数 $n \geq k \geq 0$ に対し，n 個のものから k 個取って並べる順列の総数を ${}_nP_k$ と表す．このとき，

$$ {}_nP_0 = 1, \quad {}_nP_k = n \, {}_{n-1}P_{k-1} \quad (k \geq 1) $$

である．これを用いて，再帰によって ${}_nP_k$ を計算するアルゴリズムを書け．

4-6. 次のアルゴリズムは再帰を用いてフィボナッチ数 F_n を計算するものである．このアルゴリズムで F_n を計算したとき，関数 Fibonacci が $N(n)$ 回呼び出されるとする．このとき，$N(n) \geq F_n$ であることを示せ．

```
function Fibonacci(n)
    if n = 0 or n = 1 then
        return 1
    else
        return Fibonacci(n − 1) + Fibonacci(n − 2)
    end if
end function
```

4-7. 数列 $\{C(n)\}$ が次の漸化式で定義されているとする．

$$ C(1) = 0, \quad C(n) = 2C(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad (n \geq 2). $$

k を非負整数として，$n = 2^k$ のとき，$C(n)$ を n を用いて表せ．

4-8. 数列 $\{C(n)\}$ が次の漸化式で定義されているとする．

$$ C(1) = 0, \quad C(n) = C(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2 \quad (n \geq 2). $$

k を非負整数として，$n = 2^k$ のとき，$C(n)$ を n を用いて表せ．