アルゴリズム B 演習 No. 3 2013 年 10 月 25 日配布

3. より複雑なデータ構造

- 以下では，グラフとして，多重辺やループを持たない無向グラフのみを考える．
- 閉路を持たない連結グラフを**木**という．
- 特別な頂点が 1 つ定められている木を**根付き木**といい，この特別な頂点を**根**という．隣接する 2 頂点 P, Q に対し，P の方が根に近いとき，P を Q の**親**，Q を P の**子**という．また，頂点 Q から根までの道の間に頂点 P があるとき，P を Q の**先祖**，Q を P の**子孫**という．子を持たない頂点を**葉**という．頂点から根までの道の長さをその頂点の**深さ**という．頂点の深さの最大値を根付き木の**高さ**[*1]という．
- 各頂点の子の数が n 以下であるような根付き木を $\boldsymbol{n}$ **分木**という．
- **2 分探索木**とは，各頂点の値が，それより左にある子孫の値より大きく，それより右にある子孫の値より小さいような 2 分木である．次の操作が可能である．
  - insert(x): x を追加する．
  - delete(x): x を取り除く．

  データを追加する際には正しい位置に葉を付け加えればよい．データの削除は次のように行われる．まず，削除する頂点が葉である場合は，それを取り除けばよい．削除する頂点が 1 個の子を持つ場合，前後の頂点をつなげばよい．削除する頂点が 2 個の子を持つ場合，左側の子孫のうち値が最大のもの（または右側の子孫のうち値が最小のもの）を削除する頂点の位置に移せばよい．一般に，2 分探索木はデータの探索が高速に可能である（平均で $O(\log n)$ 回の比較でよい）．しかし，データの追加・削除の順序によっては木の高さが大きくなり，効率が非常に悪くなる．
- **優先順位付きキュー**は，次の操作を持つデータ構造である．
  - insert(x): x を追加する．
  - deletemin: 優先順位付きキューの最小の要素を返し，キューから取り除く．

  優先順位付きキューの実装として，半順序木を使うことができる．半順序木とは，各頂点の値がその子の値以下になる 2 分木である．優先順位付きキューを実装するときは，さらに，半順序木の最下段以外の段は頂点で埋まっており，最下段は左詰めになっていることを要求する．この条件を満たす半順序木を配列で表現したものを**ヒープ**[*2]という．半順序木に要素を追加，削除する際には，その性質を保つように頂点を入れ替える必要がある．

[*1] 頂点の深さの最大値に 1 加えたものを高さと呼ぶこともある．

[*2] この条件を満たす半順序木をヒープと呼ぶこともある．

問題

3-1. n 個の頂点を持つ木は $n-1$ 本の辺を持つことを示せ.

3-2. 要素 27, 18, 28, 45, 90, 23, 53 を持つ 2 分探索木の中で，高さが最も小さくなるものと，高さが最も大きくなるものをそれぞれ 1 つずつ図示せよ.

3-3. n 分木 T の高さが h であるとき，T の頂点の個数の最大値と最小値を求めよ.

3-4. 空の 2 分探索木に対し，次の操作を行ったときの過程と最終的に得られる木を図示せよ.

$$\text{insert}(74) \to \text{insert}(97) \to \text{insert}(12) \to \text{insert}(64) \to \\ \text{insert}(65) \to \text{delete}(65) \to \text{delete}(12)$$

3-5. 空の 2 分探索木に対し，次の操作を行ったときの過程と最終的に得られる木を図示せよ.

$$\text{insert}(67) \to \text{insert}(99) \to \text{insert}(13) \to \text{insert}(73) \to \\ \text{insert}(37) \to \text{delete}(67) \to \text{delete}(73)$$

3-6. 要素 1, 2, 3, 4 を持つ半順序木であって，優先順位付きキューを実装する際の条件を満たすもの，すなわち，半順序木の最下段以外の段は頂点で埋まっており，最下段は左詰めになっているものをすべて図示せよ.

3-7. 半順序木で実装された空の優先順位付きキューに対し，次の操作を行ったときの過程と最終的に得られる木を図示せよ.

$$\text{insert}(62) \to \text{insert}(92) \to \text{insert}(94) \to \text{insert}(54) \to \\ \text{deletemin} \to \text{deletemin} \to \text{insert}(40)$$

3-8. 半順序木で実装された空の優先順位付きキューに対し，次の操作を行ったときの過程と最終的に得られる木を図示せよ.

$$\text{insert}(31) \to \text{insert}(61) \to \text{insert}(37) \to \text{insert}(73) \to \\ \text{deletemin} \to \text{insert}(15) \to \text{deletemin}$$