

2. 和と漸化式, 基本的なデータ構造

- 配列とは, データを一列に並べ, 添字 (index) によって要素を指定できるようにしたデータ構造である.
- 単方向連結リストとは, 各要素がデータと 1 つのポインタからなり, 各要素のポインタは後続要素のアドレスを格納するデータ構造である.
- 双方向連結リストとは, 各要素がデータと 2 つのポインタからなり, 各要素のポインタは先行要素と後続要素のアドレスを格納するデータ構造である.
- スタックとは, 後に入れたデータを先に取り出すデータ構造である. この性質を LIFO (last-in first-out) と呼ぶ. 次の操作を行うことができる.
 - push(x): スタックの一番上に x を挿入する.
 - pop: スタックの一番上の要素を返し, それをスタックから取り除く.
- キュー (待ち行列) とは, 先に入れたデータを先に取り出すデータ構造である. この性質を FIFO (first-in first-out) と呼ぶ. 次の操作を行うことができる.
 - enqueue(x): キューの最後尾に x を挿入する.
 - dequeue: キューの先頭の要素を返し, それをキューから取り除く.

問題

(解答に際して, その問題より前にある問題の結果を用いてもよい.)

2-1. $\sum_{k=1}^n k^2 = O(n^3)$ が成り立つことを示せ.

2-2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = O(1)$ が成り立つことを示せ.

2-3. 実数 r が $r > 1$ を満たすとき, $\sum_{k=1}^n r^k = O(r^n)$ が成り立つことを示せ.

2-4. $\log n! = O(n \log n)$ が成り立つことを示せ.

2-5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

で定義する. a_n の一般項を求めよ. また, $a_n = O(c^n)$ となる実数 $c > 0$ で最小のものを求めよ.

- 2-6. n 個の整数が格納されている配列 a に対して、積 $\prod_{i=1}^n a[i]$ を求めるアルゴリズムを書け．
- 2-7. n 個の整数が格納されている配列 a と、整数 x に対して、 $a[i] = x$ となる最大の添字 i を求めるアルゴリズムを書け．($a[i] = x$ となる添字 i が少なくとも一つ存在すると仮定してよい．)
- 2-8. 次の表で表される、「赤」で始まり「紫」で終わる単方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60
データ	青	赤	黄	橙	緑	紫
ポインタ	60	40	50	30	10	0

リストの先頭を指すポインタは 20 であり、指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま、このリストの「青」の直後に新たなデータ「藍」を挿入したい．データ「藍」のアドレスが 70 であるとき、どのような操作をすればよいか述べ、その結果として得られるリストを上の方のように表せ．

- 2-9. 次の表で表される、「赤」で始まり「紫」で終わる双方向連結リストを考える．

アドレス	10	20	30	40	50	60
データ	青	赤	黄	橙	緑	紫
先行要素へのポインタ	50	0	40	20	30	10
後続要素へのポインタ	60	40	50	30	10	0

指し示す要素がないときポインタは 0 とする．いま、このリストからデータ「橙」を取り除きたい．どのような操作をすればよいか述べ、その結果として得られるリストを上の方のように表せ．

- 2-10. 空のスタックに次の操作を行ったとき、スタックがどのようなになるか示せ．

push(E) → push(C) → push(B) → pop → push(A) →
push(F) → pop → pop → push(D) → pop

- 2-11. 空のキューに次の操作を行ったとき、キューがどのようなになるか示せ．

enqueue(E) → enqueue(C) → enqueue(B) → dequeue → enqueue(A) →
enqueue(F) → dequeue → dequeue → enqueue(D) → dequeue