アルゴリズム B 演習 No. 1 2013 年 10 月 11 日配布

1. 位取り記数法と漸近記法

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ を自然数全体の集合とする．b を 2 以上の自然数とする．自然数 n が

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b^i \quad (m \in \mathbb{N},\, a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\},\, a_{m-1} \neq 0)$$

  を満たすとき，$n = (a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$ と表し，これを n の ***b* 進表記**という．この記数法を ***b* 進法**という．

- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非負実数全体の集合とする．関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える．
  - ある実数 $c > 0$ と自然数 n_0 が存在して，任意の自然数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す.
  - 任意の実数 $c > 0$ に対し，ある自然数 n_0 が存在して，任意の自然数 n に対し，

$$n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) \leq cg(n)$$

    が成り立つとき，

$$f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$$

    と表す.

問題

（解答に際して，その問題より前にある問題の結果を用いてもよい.）

1-1. 2 進法で表された次の数を 10 進法で表せ.

$$\text{(a) } (101)_2 \quad \text{(b) } (11011)_2 \quad \text{(c) } (101001)_2$$

1-2. 10 進法で表された次の数を 2 進法で表せ.

$$\text{(a) } (10)_{10} \quad \text{(b) } (21)_{10} \quad \text{(c) } (47)_{10}$$

1-3. 16 進法で表された次の数を 10 進法で表せ．ただし，10, 11, ..., 15 を表すために A, B, ..., F を用いるものとする．

(a) $(64)_{16}$　(b) $(\mathrm{ABC})_{16}$　(c) $(3\mathrm{F}3)_{16}$

1-4. 10 進法で表された次の数を 16 進法で表せ．ただし，10, 11, ..., 15 を表すために A, B, ..., F を用いるものとする．

(a) $(319)_{10}$　(b) $(1234)_{10}$　(c) $(2013)_{10}$

1-5. 天秤と 1g, 2g, 4g, 8g の分銅が 1 個ずつあるとする．天秤の一方だけに分銅を乗せるとき，1g, 2g, ..., 15g の重さを量れることを示せ．

1-6. 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考え，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ が成り立つとする．有限な極限値

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

が存在するならば，$f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$ が成り立つことを示せ．

1-7. 1-6 の逆が成り立たないことを，次の条件を満たす関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を具体的に与えることによって示せ．

(a) $f(n) = O\bigl(g(n)\bigr)$.

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ が成り立つ．

(c) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ は存在しない．

1-8. 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考え，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) > 0$ が成り立つとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(b) $f(n) = o\bigl(g(n)\bigr)$.

1-9. 次の式が成り立つことを示せ．

(a) $n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$.

(b) $\sqrt{n} = o(n)$.

(c) $2^{n-2} + n^{50} = O(2^n)$.

1-10. 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，$\log n = o(n^{\varepsilon})$ が成り立つことを示せ．