

学修番号 : \_\_\_\_\_ 氏名 : \_\_\_\_\_

以下の 3 問に解答せよ . 余白が足りない場合は裏面を使ってもよい .

1.  $A$  を正方行列 ,  $k$  を正の整数として ,  $A^k = E$  であるとする . このとき ,  $A$  の固有値はすべて 1 の  $k$  乗根であることを示せ .

2. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

に対し，次の問に答えよ．

- (a)  $A$  の固有多項式  $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$  を求めよ，
- (b)  $A$  の最小多項式を求めよ．
- (c) 各固有値に対する固有空間の次元と基底を求めよ．
- (d)  $A$  は対角化可能か？対角化可能ならば， $P^{-1}AP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  を 1 つ求め， $A$  を対角化せよ．

3.  $A$  を  $n$  次複素正方行列,  $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を  $A$  が定める線形変換とする.  $T_A$  が固有値  $0$  を持ち,  $T_A$  の固有値  $0$  に対する広義固有空間が  $\mathbb{C}^n$  であるならば,  $A$  はべき零行列であることを示せ.