線形代数 III 演習（第 13 回） 2012 年 7 月 11 日配布

小テスト問題（再掲）

次の 2 次曲線を標準化せよ．

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1.$$

演習問題

$\mathbb{R}^n$ において，2 次方程式

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2b_1x_1 + \cdots + 2b_nx_n + c = 0$$

を満たす点全体を 2 次曲面という．2 次曲面がある点に関して点対称であるとき，有心 2 次曲面であるといい，そうでないとき，無心 2 次曲面であるという．

$\mathbb{R}^n$ 内の 2 次曲面の方程式は，平行移動と直交変換によって座標変換することで，次の形にすることができる．

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + d = 0 & \text{（有心 2 次曲面のとき），} \\ \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1}^2 + 2py_n = 0 & \text{（無心 2 次曲面のとき）.} \end{cases}$$

これを 2 次曲面の標準形という．

$\mathbb{R}^3$ における 2 次曲面は次ページの表 1 のように分類することができる．

13-1. 次の 2 次曲面の標準形を求めよ．

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2y + 6z + 2 = 0.$$

13-2. 次の 2 次曲面の標準形を求めよ．

$$x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 2yz + 4y - 4z - 2 = 0.$$

13-3. 次の 2 次曲面の標準形を求めよ．

$$x^2 + 2z^2 + 4\sqrt{3}yz + 2\sqrt{2}zx - 4\sqrt{6}xy + 4\sqrt{3}x + 6\sqrt{2}y - 2\sqrt{6}z - 3 = 0.$$

13-4. 次の 2 次曲面の標準形を求めよ．

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz + 4\sqrt{2}zx - 12x - 6\sqrt{2}y + 6\sqrt{2}z - 1 = 0.$$

13-5. 次の 2 次曲面が双曲放物面となるように定数 c の値を定め，その標準形を求めよ．

$$x^2 + y^2 + cz^2 + 2\sqrt{2}yz - 2\sqrt{2}zx + 6xy - 4x + 4y + 4\sqrt{2}z + 1 = 0.$$

方程式	名称
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$	（空集合）
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	楕円面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	（1 点）
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	二葉双曲面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	一葉双曲面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	楕円錐面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	（空集合）
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	楕円柱面
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	1 直線
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲柱面
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	交わる 2 平面
$\frac{x^2}{a^2}+1=0$	（空集合）
$\frac{x^2}{a^2}=1$	平行 2 平面
$x^2=0$	重なった 2 平面
$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$	楕円放物面
$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	双曲放物面
$z=\pm\frac{x^2}{a^2}$	放物柱面

表 1　2 次曲面の分類