線形代数 III 演習（第 11 回） 2012 年 6 月 27 日配布

小テスト問題（再掲）

A, B を n 次実正方行列とする．次の 2 条件は同値であることを示せ．

(a) $A+iB$ はユニタリ行列である．

(b) $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ は直交行列である．

演習問題

$A=(a_{ij})$ を正方行列とする．A の転置行列を ${}^tA$ で表す．A の各成分を複素共役で置き換えた行列を $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ で表す．$A^*={}^t\overline{A}$ を A の随伴行列という．

複素正方行列 A が $A^*A=AA^*$ を満たすとき，A を正規行列という．

11-1. 次の行列 A が正規行列であることを確かめ，ユニタリ行列 P を用いて対角化せよ．また，P を求めよ．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

11-2. 次の行列 A が正規行列であることを確かめ，ユニタリ行列 P を用いて対角化せよ．また，P を求めよ．

$$A=\begin{bmatrix} i & 0 & i-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{bmatrix}.$$

11-3. A, B を n 次正規行列として，$AB^*=B^*A$ であるとする．このとき，$A+B$, AB はともに正規行列であることを示せ．

11-4. n 次複素正方行列 A がユニタリ行列であるための必要十分条件は，A が正規行列であり，かつ，A のすべての固有値が絶対値 1 の複素数であることを示せ．

11-5. c_0, c_1, …, c_{n-1} を複素数として，n 次正方行列 C を $C=[c_{ij}]$, $c_{ij}=c_k$ $(k=j-i \bmod n)$ で定める．すなわち，

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}.$$

このとき，C がユニタリ行列を用いて対角化できることを示せ．