線形代数 III 演習（第 10 回） 2012 年 6 月 20 日配布

小テスト問題（再掲）

次の正方行列 A に対し，A のジョルダン標準形を求めよ．また，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

演習問題

V を複素ベクトル空間とする．写像 $(\ ,\ ) \colon V \times V \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，$(\ ,\ )$ をエルミート内積という．

1. 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ は 0 以上の実数であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
2. 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$.
3. 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$, 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対し，

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{\mu}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}).$$

注意. 上の定義において，3 は次のようになっていることもあるので注意すること．

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \overline{\mu}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}).$$

$A = (a_{ij})$ を正方行列とする．A の転置行列を ${}^tA$ で表す．A の各成分を複素共役で置き換えた行列を $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ で表す．$A^* = {}^t\overline{A}$ を A の随伴行列という．

実正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき，A を（実）対称行列という．複素正方行列 A が $A^* = A$ を満たすとき，A をエルミート行列という．

実正方行列 A が ${}^tAA = A{}^tA = E$ を満たすとき，A を直交行列という．複素正方行列 A が $A^*A = AA^* = E$ を満たすとき，A をユニタリ行列という．

10-1. 次の実対称行列 A を，直交行列 P を用いて対角化せよ．また，P を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10-2. 次のエルミート行列 A を，ユニタリ行列 P を用いて対角化せよ．また，P を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i & 1 \\ -i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{bmatrix}.$$

10-3. n 次実対称行列 A_1, A_2 に対して，$A_1A_2 = A_2A_1$ ならば，A_1A_2 も実対称行列であることを示せ.

10-4. $(\ ,\ )$ を複素ベクトル空間 V 上のエルミート内積とする．$\boldsymbol{a} \in V$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$ を $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ で定める．このとき，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し，

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$$

が成り立つことを示せ.

10-5. A, B を n 次実正方行列とする．次の 2 条件は同値であることを示せ.

(a) $A + iB$ はユニタリ行列である.

(b) $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ は直交行列である.