

小テスト問題 (再掲)

次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ. また, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -10 & -5 \end{bmatrix}.$$

演習問題

以下, 特に断らない限り, 行列の成分はすべて複素数であるとする.

正方行列 A, B が相似であるとは, 正則行列 P が存在して, $A = P^{-1}BP$ となることをいう.

9-1. 次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ. また, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -20 & -10 \\ 2 & -3 & -3 \\ 11 & -18 & -6 \end{bmatrix}.$$

9-2. 次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

9-3. 複素正方行列 A の固有値がすべて実数であるとする. このとき, A と相似な実正方行列が存在することを示せ.

9-4. A を 2 次正方行列とする. 次の 2 条件が同値であることを示せ.

(a) $X^2 = A$ となる 2 次正方行列 X が存在する.

(b) $A = O$ または $A^2 \neq O$ である.

9-5. 正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとする. このとき, 正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ をともに上三角行列にできることを示せ.

9-6. 正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとする. このとき, $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ がともにジョルダン標準形になるような正則行列 P は存在するか? 存在すればそれを証明し, 存在しないならば反例を挙げよ.