

小テスト問題 (再掲)

次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ. また, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

演習問題

以下, 行列の成分はすべて複素数であるとする.

正方行列 A, B が相似であるとは, 正則行列 P が存在して, $A = P^{-1}BP$ となることをいう.

8-1. 次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ. また, $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8-2. 次の正方行列 A に対し, A のジョルダン標準形を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 34 & -3 & 15 \\ -1 & -8 & 0 & -5 \\ 7 & 27 & -3 & 11 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

8-3. A_1 と A_2 を 3 次正方行列とし, 同じ固有多項式および同じ最小多項式を持つとする. このとき, A_1 と A_2 は相似であることを示せ.

8-4. n 次正方行列 A についての以下の 3 条件が同値であることを示せ.

- (a) 固有多項式と最小多項式が一致する,
- (b) ジョルダン標準形に現れるジョルダン細胞は, 各固有値に対してちょうど 1 個,
- (c) 各固有値に対する固有空間は 1 次元.

8-5. A を正方行列とする. A と tA は相似であることを示せ.

8-6. A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列とする. $\alpha \neq 0$ を AB の固有値とする. α は BA の固有値でもあった (問題 1-5). このとき, AB と BA のジョルダン標準形の固有値 α の部分は, ジョルダン細胞の並べ替えを除いて一致することを示せ.