線形代数 III 演習（第 6 回） 2012 年 5 月 23 日配布

小テスト問題（再掲）

行列

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

1. A がべき零行列であることを示せ．
2. A の固有値 0 に対する固有空間が 1 次元であることを示し，固有空間の基底を求めよ．
3. 上で求めた基底を $\boldsymbol{x}$ とする．$A\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^3$ を 1 つ求めよ．さらに，その $\boldsymbol{x}'$ に対して，$A\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'$ となる $\boldsymbol{x}'' \in \mathbb{C}^3$ を 1 つ求めよ．
4. 上で求めた $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ に対して，3 次正方行列 P を $P = [\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{x}'']$ で定める．$P^{-1}AP$ を求めよ．

演習問題

以下，行列の成分はすべて複素数であるとする．

正方行列 A_1, A_2, $\ldots$, A_r に対して，正方行列

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \ldots & O & A_r \end{bmatrix}$$

を A_1, A_2, $\ldots$, A_r の直和といい，$A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_r$ で表す．

複素数 α と整数 m $(m \geq 1)$ に対して，m 次正方行列

$$J(\alpha, m) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

をジョルダン細胞という．

正方行列 A に対して，ある正則行列 P が存在して，$B = P^{-1}AP$ がジョルダン細胞の直和になるとき，B を A のジョルダン標準形という．

6-1. 次の正方行列 A に対し，A のジョルダン標準形を求めよ．また，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6-2. 次の n 次正方行列 A に対し，A のジョルダン標準形を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(右上はすべて 1，それ以外は 0).}$$

6-3. n を正の整数とする．$J(0,n)^2$ のジョルダン標準形を求めよ．

6-4. n 次べき零行列 A $(n \leq 6)$ のジョルダン標準形は，A の階数と最小多項式とによって，完全に決定されることを示せ．

6-5. 7 次べき零行列であって，ジョルダン標準形は異なるが，階数と最小多項式は一致するような例を挙げよ．