線形代数 III 演習（第 4 回） 2012 年 5 月 9 日配布

小テスト問題（再掲）

1. n 次上三角行列 A の対角成分が $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に等しいとき，$(A-\alpha_1 E)(A-\alpha_2 E)\cdots(A-\alpha_n E)$ を求めよ.
2. n 次正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ とする．A が正則であると仮定する.
   (a) $c_n \neq 0$ を示せ.
   (b)
   $$A^{-1} = -\frac{1}{c_n}\left(A^{n-1} + c_1 A^{n-2} + \cdots + c_{n-2}A + c_{n-1}E\right)$$
   となることを示せ.

演習問題

以下，行列の成分はすべて複素数であるとする.

正方行列 A がべき零行列であるとは，ある正の整数 k が存在して，$A^k = O$ となることをいう.

V を n 次元複素ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を線形変換，α を T の固有値とする．V の部分空間

$$G_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ such that } (T - \alpha\,\mathrm{Id})^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$$

を T の固有値 α に対する広義固有空間という.

4-1. A がべき零行列ならば，$\operatorname{tr} A = 0$ であることを示せ.

4-2. n 次正方行列 A, B がべき零行列であるとする．$AB = BA$ ならば，$A + B$ もべき零行列であることを示せ.

4-3. A を n 次正方行列，$T_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を A が定める線形変換とする．T_A が固有値 0 を持ち，T_A の固有値 0 に対する広義固有空間が $\mathbb{C}^n$ であるならば，A はべき零行列であることを示せ.

4-4. V を n 次元複素ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を線形変換，U を V の T-不変部分空間とする．T を U に制限して得られる線形変換を $T_U\colon U \to U$ として，α を T_U の固有値とする.
   (a) α は T の固有値でもあることを示せ.

(b) 固有値 α に対する T_U の広義固有空間を G'_α，T の広義固有空間を G_α とするとき，$G'_\alpha = G_\alpha \cap U$ となることを示せ.

4-5. 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 19 & -4 & 14 \\ 27 & -7 & 18 \\ -17 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

で定義する.

(a) A の固有多項式が $(x+1)^2(x-2)$ であることを示せ.

(b) $g_1(x) = x - 2$, $g_2(x) = (x+1)^2$ とする.

$$\varphi_1(x)g_1(x) + \varphi_2(x)g_2(x) = 1$$

を満たす $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ を 1 組求めよ.

(c) 上で求めた $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ に対して，$\mathbb{C}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_i = \{\varphi_i(A)g_i(A)\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3\} \quad (i = 1, 2)$$

で定義する．$T_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を A が定める線形変換とする．このとき，W_1, W_2 が T_A-不変部分空間であることを示せ.

(d) $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$ となることを示せ.