線形代数 III 演習（第 3 回） 2012 年 4 月 25 日配布

小テスト問題（再掲）

a, b を複素数として，$a \neq b$ であるとする．次の行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ と最小多項式 $\mu_A(x)$ を求めよ．

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{(ii) } A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{(iii) } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \text{(iv) } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

演習問題

以下，行列の成分はすべて複素数であるとする．

3-1. 次の行列の A の固有多項式と最小多項式を求めよ．

$$\text{(i) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3-2. n 次正方行列 A が対角化可能であり，固有値が α ただ 1 つであるとする．このとき，A の固有多項式と最小多項式を求めよ．

3-3. n 次上三角行列 A の対角成分が α_1, α_2, $\ldots$, α_n に等しいとき，$(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E) \cdots (A - \alpha_n E)$ を求めよ．

3-4. n 次正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ とする．A が正則ならば，$c_n \neq 0$ であって，

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_n}\left(A^{n-1} + c_1 A^{n-2} + \cdots + c_{n-2}A + c_{n-1}E\right)$$

となることを示せ．

3-5. 複素正方行列 A, B の固有多項式をそれぞれ $\Phi_A(x)$, $\Phi_B(x)$ とする．A と B が共通の固有値を持たないとき，$\Phi_A(B)$, $\Phi_B(A)$ はともに正則であることを示せ．

3-6. V を n 次元複素ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を線形変換，α を T の固有値とする．V の α に対する広義固有空間 G_α を

$$G_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ such that } (T - \alpha\,\mathrm{Id})^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$$

で定義する．このとき，

$$G_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in V \mid (T - \alpha\,\mathrm{Id})^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$$

であることを示せ．