

小テスト問題 (再掲)

1. 正方行列 A に対し, A の固有多項式を $\Phi_A(x)$ と表す. A を n 次複素正方行列, $c \neq 0$ を複素数, $B = cA$ とするとき, $\Phi_B(x) = c^n \Phi_A\left(\frac{x}{c}\right)$ となることを示せ.
2. 複素正方行列 A のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいとき, $E - A$ は正則であることを示せ.

演習問題

以下, 行列の成分はすべて複素数であるとする. 正方行列 A, B が相似であるとは, 正則行列 P が存在して, $A = P^{-1}BP$ となることをいう.

- 2-1. A を正方行列, k を自然数として, $A^k = E$ であるとする. このとき, A の固有値はすべて 1 の k 乗根であることを示せ.
- 2-2. a を複素数とする. 次の行列 A の固有多項式と最小多項式を求めよ.

$$(i) A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad (ii) A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

- 2-3. 正方行列 A の最小多項式が $x^2 + x + 1$ であるとする. A^3 を求めよ.
- 2-4. 正方行列 A に対し, $A^k = O$ となるような自然数 k が存在するとする. このとき, A の最小多項式は x^m (m は自然数) の形になることを示せ.
- 2-5. 最小多項式がともに x^2 に等しいにもかかわらず相似ではないような 4 次正方行列 A_1 と A_2 の例を挙げよ.