

小テスト問題 (再掲)

以下の行列 A に対し, 次の問に答えよ.

- (1) 固有多項式 $\Phi_A(x) = \det(xE - A)$ を求めよ,
- (2) A のすべての固有値とその重複度を求めよ.
- (3) 各固有値に対する固有空間の次元と基底を求めよ.
- (4) A は対角化可能か? 対角化可能ならば, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求め, A を対角化せよ.

$$(i) A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (ii) A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

演習問題

以下, 行列の成分はすべて複素数であるとする.

- 1-1. 正方行列 A の固有値が, 重複度を込めて $-2, 1, 1, 2$ であるとき, $\text{tr } A$ と $\det A$ を求めよ.
- 1-2. A を n 次正方行列, $c \neq 0$ を複素数, $B = cA$ とするとき, $\Phi_B(x) = c^n \Phi_A\left(\frac{x}{c}\right)$ となることを示せ.
- 1-3. 正方行列 A が対角化可能であるとする. このとき, すべての正の整数 m に対して, A^m も対角化可能であることを示せ.
- 1-4. 正方行列 A のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいとき, $E - A$ は正則であることを示せ.
- 1-5. A を $m \times n$ 行列, B を $n \times m$ 行列とする. このとき, 0 でない AB の固有値はすべて BA の固有値であり, 逆に 0 でない BA の固有値はすべて AB の固有値であることを示せ.
- 1-6. 正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとする. このとき, A と B に共通の固有ベクトルが存在することを示せ.